Definíciók: → konvex halmaz / vectortér / altér

- konv. hlm.
- konv fv.
- ell. halm.:
- $S = \{x \in R \mid g(x) \leq 0\}$ is konv.

(→ konvex kombináció
→ konvex hull (burok) – domború hajótest
→ konvex függvény: $f: S \to R$ ha S konv
és $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$)

Lokális / globális min., problémafelvetés

Primál – duál (feltételes szélsőérték feladatok)

1. $\min_{x \in S} f(x)$, $S = \{x \in R \mid \overset{\text{környezet}}{h(x) = 0}\}$, $R \subset \mathbb{R}^2$

   (Klasszikus Lagrange mult. szabály) + banális példa
   $f(x) = x^2 + 1$ $h(x) = x - 1$

2. $\min_{x \in S} f(x)$, $S = \{x \in R \mid g(x) \leq 0,\ h(x) = 0\}$

   $R \subset \mathbb{R}^n$ $f: R \to \mathbb{R}$
   $g: R \to \mathbb{R}^k$
   $h: R \to \mathbb{R}^l$

LMI-k:

$$F(x) = F_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j F_j \geq 0$$

→ konvex feltételek

→ LMI egyenlőtlenség rendszer

→ Schur komplemens lemma
↳ kvadratikus feltételek +  példa

(→ Paraméterfüggő LMI-k)

Menetrend

CCS 2018 b
3 hét TG

Definíciók:

Def. S konvex halmaz ha

$\forall x, y \in S$-re $\forall \alpha \in [0,1]$-re $\alpha x + (1-\alpha) y \in S$

Def $f: S \to \mathbb{R}$ konvex függvény, ha

1° S konvex

2° $\forall x, y \in S$ $\forall \alpha \in (0,1)$-re

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Állítás legyen $R \subset V$ { konvex részhalmaz ~~[illegible]~~ / altér }

$f: R \to \mathbb{R}$ konv.

ekkor $S = \{ x \in R \mid f(x) \leq c \}$ konvex.

Biz: legyen $x, y \in S \Rightarrow f(x) \leq c$, $f(y) \leq c$

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \leq \alpha c + (1-\alpha) c = c$$

$f: R \to \mathbb{R}$ fv. lokális min. veszi fel x_0-ban, ha $\exists\, \varepsilon > 0$ s.t. $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall \|x - x_0\| < \varepsilon$

---

ha f konvex akkor globális max.

tfh. x_0 lok.min. legyen $x \in \mathbb{R}^n$

$$\| x_0 - (1-\alpha) x_0 - \alpha x \| = \| \alpha (x_0 - x) \| = |\alpha| \cdot \| x_0 - x \|$$

$$f(x_0) \leq f((1-\alpha) x_0 + \alpha x) \leq (1-\alpha) f(x_0) + \alpha f(x)$$

$$0 \leq \alpha (f(x) - f(x_0)) \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

Legyen $I = [a,b] \in \mathbb{R}$

legyen $f(x)$ folyt diff.ható
$g(x)$ folyt függvények

Keresem $p^* = \min_{x \in S} f(x)$

$$S = \{ x \in I \mid g(x) \leq 0 \}$$

Megoldás legyen $L(x,y) = f(x) + y\, g(x)$ ahol $y \geq 0$

$$\underbrace{\min_{x \in I} f(x) + y\, g(x)}_{\ell(y)} \leq \min_{x \in S} f(x) + y\, g(x) \leq \min_{x \in S} f(x) \leq p^*$$

tehát $\ell(y) \leq p^* \quad \forall y \geq 0$

ezért $\underbrace{\max_{y \geq 0} \ell(y)}_{D^*} \leq p^*$

(kevésbé szép)

Primál-duál
Lagrange mult. szab.

CCS 2018b
3.hét TG

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ $\quad f: R \to \mathbb{R}$ folyt diff. x_1, x_2 szerint.

legyen $g: R \to \mathbb{R}$ folyt

$$\boxed{\begin{array}{l} p^* = \inf\limits_{x \in S} f(x) \\ \text{ahol } \; S = \{ x \in R \mid g(x) = 0 \} \end{array}}$$

Megoldás: Lagrange multiplikátor szabály

Legyen $L(x,y) = f(x) + y\, g(x)$

$$\ell(y) = \inf_{x \in R} f(x) + y\, g(x) \le \inf_{x \in S} f(x) + y\, g(x) = \inf_{x \in S} f(x) = p^*$$

$\forall y$-ra

ha $\forall y$-ra akkor $D^* = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}} \ell(y) \le p^*$

Vagyis $D^* = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}} \inf\limits_{x \in R} f(x) + y\, g(x)$

$\Downarrow$

nyeregpontja lesz $L(x,y)$-nak!

(szebb) Primál-duál Lagrange mult.

CCS 2018ő
3.hét TG

Banális példa:

$$f(x) = (x+2)^2$$

$$g(x) = \cancel{}\, x - 1$$

$$L(x,y) = (x+2)^2 + y\,\cancel{}(x-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x+2) + y\,\cancel{} = 0 \quad \Rightarrow y = -2(x+2)$$

$$x = \frac{y}{2} - 2$$

$$L(x^*, y) = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 3\right) y$$

$$= \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 3y$$

$$\nabla L = (2x + 4 + y,\; x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Primál duál
banális példa

CCS 2018b
3 hét TG

Primál duál általános :

Adott $R \subset \mathbb{R}^n$ $\quad f: R \to \mathbb{R}$

$g: R \to \mathbb{R}^k$

$h: R \to \mathbb{R}^l$

Feladat $\quad \inf_{x \in S} f(x) = p^*$

$$S = \{ x \in R \mid g(x) \leq 0 \ , \ h(x) = 0 \}$$

Megoldás: legyen $L(x,y,z) = f(x) + y\, g(x) + z\, h(x) \ , \ y \geq 0$

$$\ell(y,z) := \inf_{x \in R} L(x,y,z) \leq \inf_{x \in S} L(x,y,z) \leq \inf_{x \in S} f(x) = p^*$$

$\forall y \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^l$ $\qquad \Uparrow \quad \boxed{L(x,y,z) \leq f(x) \quad \forall x \in S}$

$\Downarrow$

$$D^* := \sup_{y \geq 0, z} \ell(y,z) \leq p^*$$

Tehát keresem $\sup_{y \geq 0, z} \inf_{x \in R} L(x,y,z)$ -t!

(T) Karush-Kuhn-Tucker

Tfh. 1° R halmaz, f és g fv-ek mind konvexek.

2° $\exists\, x_0 \in \operatorname{int} R$ u.h. $g(x_0) \leq 0$, $h(x_0) = 0$

és $g_i(x_0) < 0$ minden nem affin $g_i(x)$-re

Ekkor $\exists (y^*_{\geq 0}, z^*)$ u.h.

$D^* = \ell(y^*, z^*)$ (a duál feladatnak van megoldása)

Sőt $x^* \in S$-re $f(x^*) = p^* \iff x^*$ min. $L(x, y^*, z^*)$-ot $\forall x \in R$

u.h. $\langle y^*, g(x^*) \rangle = 0$

CCS 2018b

3 hét TG

Lineáris mátrixegyenlőtlenségek

$$F(x)=F_0 + x_1F_1 + \dots + x_n F_n \succeq 0$$

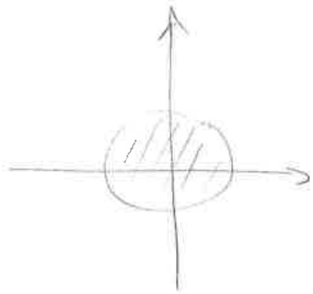
$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

$$F_0, F_1 \dots F_n \in S_n = \{ M \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid M = M^T \}$$

pld $\quad F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ x & y & 1 \end{pmatrix} \succeq 0$

$$\det\left(F(x,y)\right) = 1 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$



→ Az LMI-k konvex feltételek vagyis

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \succeq 0 \} \text{ konvex.}$$

Biz: tfh. $x, y \in S$ ekkor

$$F(\alpha x + (1-\alpha) y) = \alpha \underbrace{F(x)}_{\succeq 0} + (1-\alpha) \underbrace{F(y)}_{\succeq 0} \succeq 0$$

→ LMI egyenlőtlenség rendszer

→ Lineáris altér feltételek:

pld: $\begin{cases} F(x) \succeq 0 \\ Ax = b \end{cases}$ vagy $\begin{cases} F(x) \succeq 0 \\ x = Ay + b \text{ valamilyen } y \end{cases}$

↓

vagyis x-et $x = A_1 y_1 + \dots + A_m y_m + b$ alakban keresem

$$\cancel{F\left(b + \sum_{j=1}^{m} A_j y_j\right) = F_0}$$

Schur komplemens lemma

legyen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$

$$M \succeq 0 \iff \begin{cases} A - BC^{-1}B^T \succeq 0 \\ C \succeq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A \succeq 0 \\ C - B^T A^{-1} B \succeq 0 \end{cases}$$

pld: $x^2+y^2 \le 1 \iff 1 - (x\ y)\, I^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ge 0$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & x & y \\ \hline x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sőt: bármilyen kvad. ~~felt~~ feltétel

$\boxed{x^T Q x \le \alpha}$ ahol $Q \succeq 0 \Rightarrow \exists\, P = Q^{-1}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha - x^T P^{-1} x \ge 0 \\ Q \succeq 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \alpha & x^T \\ x & Q \end{pmatrix} \succeq 0$$

pld:

$$\min \; x^2+y^2+x+y$$
$$\text{s.t.} \; \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \xrightarrow{\text{megold}} \begin{cases} x = -0.5 \\ y = -0.5 \end{cases}$$

$$\min \; x^2+y^2+10x+8y$$
$$\text{s.t.} \; x^2+y^2 \le 1 \quad \xrightarrow{\text{megold}} \begin{cases} x = -0.8575 \\ y = -0.5145 \end{cases}$$

- Schur komp
- Kvadratikus

CCS 2018 b
3 hét TG

Functional analysis 2018, homework test 1.

1. What is the "distance" between the functions $f(x) = x$ and $g(x) = x^2$ in the functions space $C[0,1]$ with the supremum-norm $\|\cdot\|_\infty$ and the 2-norm $\|\cdot\|_2$, respectively?
2. Prove that in ℓ^1 the closed unit sphere $\overline{B}_1(0) := \{x \in \ell^1 : \|x\|_1 \le 1\}$ is not compact.

---

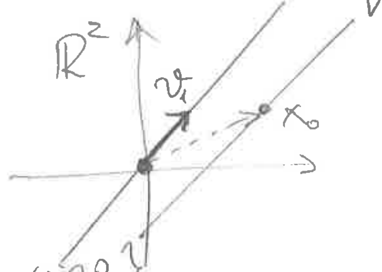
legyen $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ egy m dimenziós altér

$V_0 = \operatorname{span}\langle v_1, \dots, v_m \rangle$

és legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$

ekkor $V := V_0 + x_0 = \left\{ x = x_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$

pld $\mathbb{R}^2$



Adott egy felt.: $F(x) \ge 0$

ú.h. $x \in V$ vagyis $\exists y \in \mathbb{R}^m$ ú.t.

$x = Ay + x_0$

legyen $A = (v_1, \dots, v_m)$

$$F(x) = F_0 + \overbrace{T(x)}^{\text{lineáris}} = F_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i F_i$$

$$F\left(x_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j\right) = F_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(x_{0i} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_{ji} \right) F_i$$

$$= F_0 + \sum_{i=1}^{n} x_{0i} F_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} v_{ji} F_i =$$

$$= F_0 + T(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j T(v_j)$$

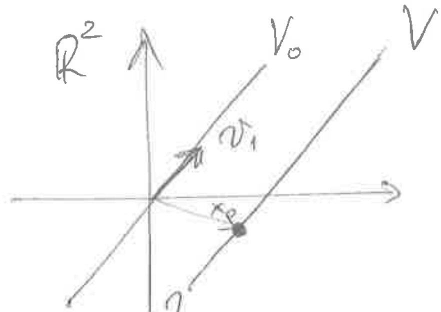
CCS 2018b

1 Mi megold. altérben 3 pont TG

LMI megoldása altérben (ill. eltoltjában)

Legyen adott $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ egy m dim. altér

$V_0 = \mathrm{span}\langle v_1, \dots, v_m \rangle$



és legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$V = \left\{ x = x_0 + v = x_0 + \sum_{i=1}^{m} y_i v_i \;\middle|\; y \in \mathbb{R}^m \right\}$$

Feladat:

$$\boxed{x = ? \text{ s.t. } F(x) = F_0 + T(x) \succeq 0 \quad \text{és } x \in V}$$

Ez megfogalmazható egyetlen LMI feltételként:

Tudom, hogy $x = x_0 + \sum_{i=1}^{m} y_i v_i$ ahol $v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{ij} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix}$

Ezért behelyettesítek:

$$F\left(x_0 + \sum_{i=1}^{m} y_i v_i\right) = F_0 + T(x_0) + \sum_{j=1}^{m} y_j F(v_i)$$

2. *(15 pont)* Tekintsük az ℓ^1 teret a szokásos normával. Ebben a térben legyen R egy részhalmaz, melyet így adunk meg:

$R = \{x = (x_n) \;:\; \exists N$ melyre $x_M = 0$, minden $M > N\}$.

(a) Igazoljuk, hogy R nem zárt halmaz.

(b) Igazoljuk, hogy R nem korlátos halmaz.

(c) R sűrű-e ℓ^1-ben?

LMI megold altérben

CCS 2018b
3hdt TG