Isidori I., Example 1.6.4

PD egyenletrendszer (sikertelen)

In[1]:=
```
Clear[gradu]
gradu = Grad[u[x, y, z, t], {x, y, z, t}]
DSolve[{gradu.{1, 0, 0, y} == 0, gradu.{0, 1, 0, x} == 0}, u[x, y, z, t], {x, y, z, t}]
```

Out[2]= $\{u^{(1,0,0,0)}[x, y, z, t],\ u^{(0,1,0,0)}[x, y, z, t],\ u^{(0,0,1,0)}[x, y, z, t],\ u^{(0,0,0,1)}[x, y, z, t]\}$

Out[3]= $\text{DSolve}[\{y\,u^{(0,0,0,1)}[x, y, z, t] + u^{(1,0,0,0)}[x, y, z, t] == 0,\ x\,u^{(0,0,0,1)}[x, y, z, t] + u^{(0,1,0,0)}[x, y, z, t] == 0\},\ u[x, y, z, t],\ \{x, y, z, t\}]$

Ezt nem tudja megoldani (sajnos)

Egyenként megoldva, majd összevonni

In[4]:=
```
DSolve[gradu.{1, 0, 0, y} == 0, u[x, y, z, t], {x, y, z, t}]
```

Out[4]= $\{\{u[x, y, z, t] \to C[1][y, z][t - x\,y]\}\}$

In[5]:=
```
DSolve[gradu.{0, 1, 0, x} == 0, u[x, y, z, t], {x, y, z, t}]
```

Out[5]= $\{\{u[x, y, z, t] \to C[1][x, z][t - x\,y]\}\}$

Ebből a két megoldásból kell összegyúrni a végleges megoldást.
Az általános megoldást így is lehet értelmezni: $\lambda(x) = x_4 - x_1 x_2 + C(x_3)$
Így a speciális megoldások pl. $\lambda_1(x) = x_4 - x_1 x_2$, $\lambda_2(x) = x_3$

Isidori I., Example 4.1.4

In[6]:=
```
x = {x1, x2, x3};
g = {Exp[x2], 1, 0};
gradu = Grad[u[x1, x2, x3], x];
DSolve[gradu.g == 0, u[x1, x2, x3], x]
```

... Solve: Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

Out[9]= $\{\{u[x1, x2, x3] \to C[1][x3][e^{x2} - x1]\}\}$

Tehát az általános megoldás: $\lambda(x) = e^{x_2} - x_1 + C(x_3)$

Egy saját példa

Legyen $g(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 1 \\ -x_1\, x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ és $h(x) = x_1\, x_2 + x_3$.

Ekkor $\phi_1(x) = h(x)$, $\phi_2(x) = L_f\, h(x)$, mivel $L_g\, h(x) = 0$.
Számítsik ki $\phi_3(x)$-et úgy, hogy $L_g\, \phi_3(x) = 0$.

In[10]:=
```
x = {x1, x2, x3};
g = {x1^2 - 1, -x1 x2, x2};
gradu = Grad[u[x1, x2, x3], x];
DSolve[gradu.g == 0, u[x1, x2, x3], x]
```

Out[13]= $\{\{u[x1, x2, x3] \to C[1][\sqrt{-1 + x1^2}\; x2,\; x1\, x2 + x3]\}\}$

Tehát az általános megoldás: $\lambda(x) = C_1\, x_2 \sqrt{x_1^2 - 1} + C_2(x_1\, x_2 + x_3)$

Ellenőrzés:

In[14]:=
```
gradu = Grad[Sqrt[-1 + x1^2] x2, x]
```

Out[14]= $\left\{\frac{x1\, x2}{\sqrt{-1 + x1^2}},\; \sqrt{-1 + x1^2},\; 0\right\}$

In[15]:=
```
gradu.g
```

Out[15]= 0