Biot–Savart törvény

általános alak:

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r}-\underline{r}')}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|^3}\, dV'}$$

$dV' = A \cdot dl'$

$dV' = dx'dy'dz'$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ → erre a pontra keressük $B(r)$ értékét

$\underline{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ → ezen megy integrálunk

Ha a vezeték amiben áram folyik végig azonos A keresztmetszetű és a keresztmetszete mentén egyenletes (azonos) az áramsűrűség

J, j, A

$J = \int_A \underline{j}\, d\underline{S} = \|\underline{j}\| \cdot A$ } megj. az J tulajdonképpen j vektormező fluxusa A felületre.

$j(r') = \underbrace{\|j(r')\|}_{\text{az áramsűrűség normája (a vektor hossza)}} \cdot \underline{t}$ → az áramsűrűség vektor iránya (egységnyi hosszú érintő irányú vektor)

tehát $\boxed{j(r') = \frac{J}{A} \cdot \underline{t}}$

$dV' = A \cdot dl'$

$d\underline{l}' := \underline{t} \cdot dl$

$\underline{t}$ → irány, dl → hossz

$$\int_V \frac{\underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r}-\underline{r}')}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|^3}\, dV' = \int_\Gamma \frac{\frac{J}{A}\,\underline{t} \times (\underline{r}-\underline{r}')}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|^3}\, A \cdot dl' = J\int_\Gamma \frac{d\underline{l}' \times (\underline{r}-\underline{r}')}{\|r-r'\|^3}$$

Biot–Savart törvény huzalra: $\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\int_\Gamma \frac{d\underline{l}' \times (\underline{r}-\underline{r}')}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|^3}$

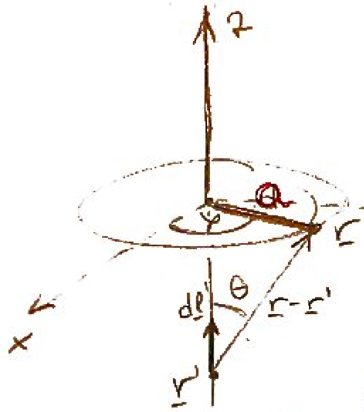
Csufa Magi

$$B(r) = \|\underline{B}(\underline{r})\| = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\|d\underline{l}'\times(\underline{r}-\underline{r}')\|}{\|r-r'\|^3}$$

$$\Gamma = \left\{ r'(t) = \gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in D \right\}$$

A Problem 1-nél kapásból ezt szedtük ki, DE egyszerűbb egyből a vektoros alakot integrálni (lásd. köv. old.)

Jelen példánál:



$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$d\underline{l}' = \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dt \end{pmatrix} \Rightarrow \|d\underline{l}'\| = dt$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

áttérünk a polárkoordinátákra

mivel B körszimmetrikus φ lehet tetszőleges! Legyen $\varphi = 0$

$$\underline{r}(\varphi=0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ez a sinθ-s dolog kicsit túl van bonyolítva!

$$\underline{r}-\underline{r}' = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \|\underline{r}-\underline{r}'\| = \sqrt{a^2+t^2}$$

$$\|d\underline{l}'\times(\underline{r}-\underline{r}')\| = \underbrace{\|d\underline{l}'\|}_{dt}\cdot\|r-r'\|\cdot\sin\theta \Bigg\} \Rightarrow$$

valamint $\sin\theta = \dfrac{a}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|}$

$$\Rightarrow B(\underline{r}) = \boxed{\frac{\mu_0 J}{4\pi}\int_\Gamma \frac{a\cdot dt}{\sqrt{a^2+t^2}^{\,3}}} \;(**)\; = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\,\frac{1}{a}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \boxed{\frac{\mu_0 J}{2\pi a}}$$

1.) d helyett a-t értem

2.) a feladatban x tengely szerint, de (véletlenül) z tengely szerint csináltam!

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_\Gamma \frac{d\underline{l}' \times (r-r')}{\|r-r'\|^3}$$

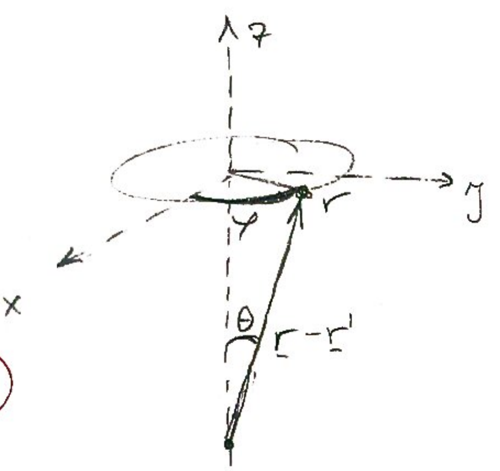
$\longrightarrow$ Számítsuk ki a teljes vektort (ne csak $\|\underline{B}(\underline{r})\|$-et)

$$d\underline{l}' \times (r-r') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dt \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin\varphi\, dt \\ a\cos\varphi\, dt \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B}(\underline{r}) = \underbrace{\boxed{\frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_\Gamma \frac{a\, dt}{\sqrt{t^2+a^2}^{\,3}}}}_{= \frac{\mu_0 J}{2\pi a}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

**

Ne keverjük össze φ-t és θ-t!



Egyből a ~~[illegible]~~ $\underline{B}(\underline{r})$ vektor kiintegrálása!