Név: .... Csoport: H – P+SzB – P+PP

Pontszám: ....

FUNKCIONÁLANALÍZIS 1. ZH.

2017. március 30.

Munkaidő: 60 perc

1. Normát definiálnak-e $\mathbb{R}^2$-en az alábbi függvények? Igazolja.

$$\|(x,y)\|_a = \sqrt{5x^2+7y^2}, \qquad \|(x,y)\|_b = \sqrt{5x^3+7y^3}, \qquad (x,y)\epsilon\mathbb{R}^2.$$

   Norma esetén további kérdések:

   (a) Milyen metrikát indukál? Mennyi a távolsága az $(1,0)$ és $(0,-2)$ pontoknak?

   (b) Vázolja fel az origó közepű egység sugarú kört.

   (c) Teljes-e $\mathbb{R}^2$ az adott normával?

   (d) Származtatható-e skalárszorzatból? Ha igen, adja azt meg.

2. (a) Tekintsük az $x = (x_n)$ sorozatot, ahol $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+300}}$. Az ℓ^1, ℓ^5 és ℓ^∞ sorozatterek közül melyikben van benne?

   (b) *(5 pont)* Igazolja, hogy a sorozatterek közt az alábbi összefüggés teljesül (valódi tartalmazással): $\ell^5 \subset \ell^\infty$.

3. Tekinsük a $C[0,1]$ teret a maximum-normával. Ebben a térben legyen P egy részhalmaz, melyet így adunk meg:

$$P = \{p : [0,1] \to \mathbb{R},\ \text{polinom}\}.$$

   (a) P zárt?

   (b) P korlátos?

   (c) P kompakt?

   (d) P sűrű $C[0,1]$-ben?

4. Legyen $R = [1,\infty)$. Az $L^p(R)$ függvénytérhez tartoznak-e $p = 1, \infty$ esetén az alábbi függvények:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = x^2, \qquad h(x) = \begin{cases} n, & x = n\epsilon\mathbb{N}, \\ 0, & x\notin\mathbb{N} \end{cases}.$$

   Számolja ki a függvények normáját, ahol értelmezett.

+1 *(Bonus)* Legyen $X = \mathbb{N}$ és $\mathcal{R} = 2^{\mathbf{N}}$. Definiáljuk az $(X, \mathcal{R})$ mérhető téren az alábbi mértéket:

$$\mu(A) = \sum_{k \epsilon A} \frac{1}{2^k}, \qquad rmha \ A \subset \mathbb{N}.$$

(a) Legyen $B = \{ \ \textit{páros számok} \ \}$. Mennyi $\mu(B) =?$

(b) Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény mérhetősége mit jelent?

(c) Adjon meg olyan f, $g : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvényeket, melyekre $f \epsilon L^2(X)$ és $g \not\epsilon L^2(X)$.

Válaszait indokolja.

Jó munkát!