Funkcionálanalízis

Gyakorló feladatok

2017. március 22.

Metrikus tér, normált tér és skalárszorzat tér

N1. Metrikát definiálnak-e $\mathbb{R}$-en az alábbi függvények:

(a) $d(x,y) = \big|\ |x| - |y|\ \big|$

(b) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

(c) $d(x,y) = |\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y|$

N2. Metrikát definiálnak-e $\mathbb{R}^2$-en az alábbi függvények? $x = (x_1, x_2)$ és $y = (y_1, y_2)$.

(a) $d(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$,

(b) $d(x,y) = \min(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$,

N3. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi normát, ahol $a, b \epsilon \mathbb{R}$ rögzített számok:

$$\|x\| = \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}}, \quad x = (x_1, x_2) \epsilon \mathbb{R}^2.$$

Igazoljuk, hogy ez valóban norma. Rajzoljuk fel az egységkört.

N4. (Pitagorasz tétel "megfordítva") Adott egy H Hilbert tér, benne két elem, $x, y \epsilon H$. Tegyük fel, hogy $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. igazoljuk, hogy ekkor x és y ortogonálisak.

N5. (2015. Zh feladat) Legyen V a 3×2 dimenziós mátrixok tere. Igazoljuk, hogy ebben a vektortérben valóban normát definiál az alábbi képlet:

$$\|A\| := \max_{i=1,2,3}(|a_{i1}| + |a_{i2}|), \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \epsilon \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

N6. (2015. Javító-Zh feladat) Legyen V a 2×4 dimenziós mátrixok tere. Igazoljuk, hogy ebben a vektortérben valóban normát definiál az alábbi képlet:

$$\|A\| := \max_{i=1,2,3,4}(|a_{1i}| + |a_{2i}|), \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \epsilon \mathbb{R}^{2\times 4}.$$

N7. (2016. Zh feladat) Normát definiálnak-e $\mathbb{R}^2$-en az alábbi függvények? Igazolja.

$$\|(x,y)\|_a = \Big|\, |x| + 5\,|y| \,\Big|, \qquad \|(x,y)\|_b = \Big|\, |x| - 5\,|y| \,\Big|, \qquad (x,y) \epsilon \mathbb{R}^2.$$

Norma esetén további kérdések:

(a) Milyen metrikát indukál?

(b) Vázolja fel az origó középű egység sugarú kört.

N8. Tekintsük a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható függvények $C^1[0,1]$ terét. Az alábbi kifejezések közül melyek lesznek normák ezen a vektortřen?

(a) $N_1(f) = \max\limits_{x\epsilon[0,1]} |f(x)|$,

(b) $N_2(f) = \max\limits_{x\epsilon[0,1]} |f'(x)|$,

(c) $N_3(f) = \max\limits_{x\epsilon[0,1]} |f(x)| + \max\limits_{x\epsilon[0,1]} |f'(x)|$,

(d) $N_4(f) = |f(0)| + \max_{x\epsilon[0,1]} |f'(x)|$.

N9. Az ℓ^1 sorozattérben tekintsük azokat a sorozatokat, melyekben csak véges sok 0-tól különböző tag van. Igazoljuk, hogy ezek sűrűn vannak ℓ^1-ben. Mi következik ebből?
(+ Kérdés: Vajon ℓ^∞-ben is igaz-e ez?)

N10. (2012. Zh feladat) Tekintsük az alábbi sorozat teret:

$$H = \{(x_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2(1+n^2) < \infty\}.$$

(a) Igazoljuk, hogy ezen a téren skalárszorzat lesz: $\langle x, y\rangle_H := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n (1+n^2)$.

(b) Igazoljuk, hogy $H \subset \ell^2$.

(c) Igazoljuk, hogy a fenti skalárszorzattal indukált normára: $\|x\|_H \geq \|x\|_2$, ha $x\epsilon H$.

Topológia metrikus terekben

T1. Legyenek (N, d_N) metrikus tér, $A \subset N$ nyílt halmaz. Legyen $a\epsilon A$ tetszőleges. Igazoljuk, hogy $A \setminus \{a\}$ is nyílt.

T2. Legyenek $f_n, f\epsilon C[a,b]$. Igazoljuk, hogy ha $f_n \to f$ a $\|\cdot\|_{\max}$-norma szerint, akkor $f_n \to f$ az $\|\cdot\|_1$-norma szerint is. Igaz-e ez fordítva?

T3. Az X halmazon a $d(x,y)$ diszkrét metrikát tekintjük. Igazoljuk, hogy (X,d) pontosan akkor szeparábilis, ha X megszámlálható elemszámú halmaz.

T4. Legyen K véges elemszámú halmaz valamely metrikus térben. Igazoljuk, hogy kompakt.

T5. (+) Legyen (X,d) egy kompakt metrikus tér,és legyen $\{U_i : i\epsilon I\}$ az X egy nyílt fedése. Igazoljuk, hogy van olyan $r > 0$ szám, hogy bármely $x\epsilon X$ esetén a $B_r(x)$ gömb benne van valamelyik U_i halmazban.

T6. (+) Legyen $X = (0,1) \cup \{2\}$ a számegyenes egy részhalmaza a szokásos $d(x,y) = |x-y|$ metrikával ellátva. A $(0,1)$, $(0,1)\cup\{2\}$, $\{2\}$, $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ halmazok közül melyek nyíltak, illetve zártak az (X,d) metrikus térben?

T7. (2016. Zh feladat) Legyen $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, nullmértékű halmaz (azaz $m(E) = 0$).

(a) Igazoljuk, hogy nincs belső pontja (azaz $\operatorname{int}(E) = \emptyset$).

(b) Lehet-e E nyílt? Ha igen, adjon példát.

(c) Lehet-e E zárt? Ha igen, adjon példát.

Folytonos függvények metrikus terekben

F1. Legyenek (N, d_N) és (M, d_M) metrikus terek, $f : N \to M$ folytonos függvény. Igazoljuk, hogy

(a) ha $G \subset M$ nyílt, akkor $f^{-1}(G) \subset N$ is nyílt.

(b) ha $K \subset N$ kompakt, akkor $f(K) \subset M$ is kompakt.

F2. Tekintsük a Dirichlet függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \quad \text{racionális}, \\ 0 & \text{ha} \quad x \quad \text{irracionális}. \end{cases}$$

Most kétféleképp fogunk ránézni:

(a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ közönséges valós függvény.

(b) Az $M = [0,1]$ alaptéren a diszkrét metrikát értelmezve, $f : (M,d) \to \mathbb{R}$ metrikus terek közti leképezés.

Folytonos-e f a kétféle nézőpontból?

Mérték. Mérhetőség

M1. Tekintsük a valós számoknak az alábbi részhalmazát, a szokásos euklideszi metrika mellett (ahol tehát $d(x,y) = |x-y|$):

$$H = \{x = \frac{j}{2^k} \ : \ k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq j \leq 2^k\}.$$

(a) Ez a halmaz nyílt? Zárt? Kompakt?

(b) Tekintsük $\mathbb{R}$-en a Lebesgue-mérhető halmazokat ill. a Lebesgue mértéket. Mérhető-e H? Ha igen, mennyi a mértéke?

M2. Legyen $E \subset \mathbb{R}$ nullmértékű halmaz. Igazoljuk, hogy nincs belső pontja.

M3. Legyen $H = \{x = \frac{p}{q}\sqrt{2} \ : \quad p < q \epsilon \mathbb{N}\}$. Vajon mérhető-e? Ha igen, mennyi a mértéke?

M4. Vegyük a következő speciális mérhető teret: Adott egy legalább két elemű halmaz X, a mérhető halmazok pedig $\mathcal{R} = \{\emptyset, X\}$. Milyen $f : X \to \mathbb{R}$ függvények lesznek mérhetők?

Lebesgue integrál. Lebesgue terek

L1. Konvergál-e $\mathcal{L}^1(0,1)$-ben az alábbi függvénysorozat:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{nx}}, \qquad n \epsilon \mathbb{N}.$$

L2. (+) (Markov-egyenlőtlenség) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ integrálható nemnegatív függvény. Bizonyítsuk be, hogy $\forall c > 0$ esetén

$$m(\{x : f(x) \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}} f \ dm, \qquad .$$

L3. (+) Legyen $g_n(x) = x^{\frac{1}{n}-1}$ és $f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|_1}$. Mennyi (pontonkénti határértéket tekintve):

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n =? \qquad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n =?$$

Mit tapasztalhatunk? Miért nem alkalmazható a monoton konvergencia-tétel? Miért nem alkalmazható a dominált konvergencia-tétel?

L4. (+) (Hölder egyenlőtlenség) Ha $p \geq 1$ és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, akkor $f \epsilon \mathcal{L}^p(X)$ és $g \epsilon \mathcal{L}^q(X)$ esetén $fg \epsilon \mathcal{L}^1(X)$, továbbá

$$\int_X |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Igazoljuk ezt $p = q = 2$ esetén.