1) $x \in H$ (1p)

c)

4) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 (1+n^2) \geq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ (5p)

2) sk. szorzat indukált $\|x\|_H = \left(\sum x_n^2 (1+n^2) \right)^{1/2}$ (3p)
norma

3) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_n^2}$ (3p)

3

$\mu(A) = 0 \iff \sum_{i \in A} p_i = 0 \iff A = \emptyset$ (3p) (3p)

$\Sigma 9$

Nullmértékű $= \emptyset$ (3p)

$p_0 = 0 \iff \{0\}$ is jó!

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \cdot \mu(\{i\}) =$$ (3p)

$p_i = \mu(\{i\})$ (3p)

$$= \sum_{i=1}^{\infty} f_i p_i$$ (3p) $= Ef$

$\Sigma 9$

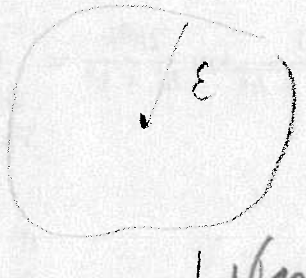
+ Válasz: Valószínűségi elosz. f val vált.

$Ef =$

(+2)

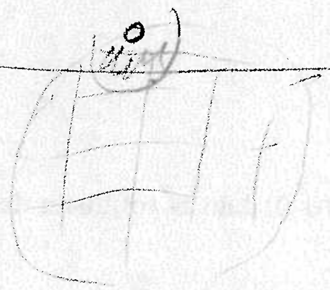
① – Def (zárt: $\forall$ torlódási $\in K$) 3p

– K-ban torlódási pont: 3p

 Ha $\varepsilon < \Gamma$:

$$\delta = \min\{d(kp, p') : p, p' \in K\}$$

– $\forall x \in K$ tol. pont ✓.



– Van-e más? 6p

mínusz

② a) Skalárszorzat

3 lineáris $\langle x+y, z\rangle$

3 homogén $\langle \lambda x, y\rangle$

2 szimmetrikus $\langle x, y\rangle$

2 nemneg $\langle x, x\rangle \geq 0$

2 negdef $= 0 \iff x = 0$

$\Sigma 12$

$\Sigma 5$

b) Tfh $x \in H$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 (1+n^2) < \infty$ 1p $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$

$1+n^2 \geq 1$ 2p 1p

$\forall n \in$: $x_n^2(1+n^2) \geq x_n^2$ 1p + pn tagonkén minoráns

(4)

a) $\chi_C \equiv 0$ mm (2p)

(Σ8) $\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in C \\ 0 & \text{ha } x \notin C \end{cases}$ (2p)

$\in \mathcal{L}^3$ (2p) $\in \mathcal{L}^\infty$ (2p)

b)

Σ8

$f(x) = x^{-1/2}$

$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ nem korlátos} \\ \hline \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ (2p) + (2) $\notin \mathcal{L}^\infty$

$\underbrace{\int \cancel{x^{-1/2}}\, x^{-3/2}}_{(1p)} = \underbrace{\frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}\, x^{-1/2}}{\cancel{1/2}\ 1/2}}_{(1p)} \notin \mathcal{L}^3$ (2p)

Név: ....

Pontszám: ....

FUNKCIONÁLANALÍZIS
2. ZH.
2013. május 22.

Munkaidő: 60 perc
Válaszait indokolja.

$\Sigma 7p$

1. Tekintsük a $H = \ell^2$ Hilbert térben az alábbi operátort:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, ...) = (0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots),$$

$\|T\| \leq 1$ (1)

tehát a páratlan indexű tagokat lenullázzuk.

$\|Tx\| \leq \|x\|$ (2)

(a) $\|T\|$ =? *(7 pont)* Def (1p)

(b) Határozzuk meg T spektrumát. *(10 pont)*

$x = (1, 0, 1, \dots)$

(c) Igazoljuk, hogy T önadjungált. *(8 pont)*

$Tx = x$ (2)

2. Legyen $X = \mathbb{R}^3$, ezen vegyük az alábbi normát:

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$$

$\|T\| = 1$ (1)

Határozzuk meg az X^* duális teret. *(12 pont)*
(Levezetéssel együtt kérjük, végeredmény önmagában nem elég.)

3. ℓ^2-ben tekintsük a bal shift operátort. Mi ennek az adjungáltja? *(9 pont)*

4. Legyen $H(x)$ az egységugrás függvény:

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Mi lesz a megfelelő T_H általánosított függvény (azaz disztribúció) második deriváltja? *(12 pont)*

5. Adja meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását a szukcesszív approximáció segítségével.

$$y' = 2y, \qquad y(0) = 1.$$

(15 pont) (+2 pont ellenőrzés)

Jó munkát!

1 b) 3p $\lambda = 1$ sajátérték

3p $\lambda = 0$

1

$\lambda \neq \{1, 0\}$; $(T - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & & \\ & -\lambda & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ Σ 10p

Def 2p

$(T - \lambda I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda} & & \\ & -\frac{1}{\lambda} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

$\lambda \notin \sigma(T)$ 2p

---

c) $\langle Tx, y \rangle = \sum_{i=\text{páros}} x_i y_i = \langle x, Ty \rangle$

3p 5 Σ 8p

2. mo $T \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$ diag

3 $Tx = (0, x_1, x_2 \ldots)$ 2p Σ 9p

$\langle Tx, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{k+1}$ 3

$= \sum_{k=2}^{\infty} y_k x_{k-1}$ 3 $T^* = S^*$ 1p

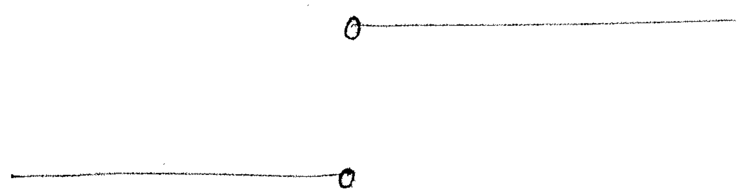
2. mo: mátrix transzponált

(4) $T_H(\varphi) = \dots \int_{\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty} \dots$ (5p)

$\boxed{\partial T_H(\varphi) = T_H(\varphi')} = \delta(\varphi) = \varphi(0)$ (5p)

2p (1+4p)

$\partial^2 T_H(\varphi) = T_H(\varphi'')$ (2p)



Lipschitz (2p)

(5) $y(x) = 1 + \int_0^x 2y(t)\,dt$ (3p)

$\cancel{y_0 =}$ $f_0 = 1$ (2p)

$f_1(x) = 1 + \int_0^x 2 \cdot 1\,dt = 1 + 2x$ (2p)

$f_2(x) = 1 + \int_0^x 2(1+2t)\,dt =$ (2p)

(2p) $y(x) = e^{2x}$

③

⑤ $$y(x) = 1 + \int_0^x (-2y(t))\,dt =$$

$$f_0 = 1$$

$$f_1(x) = 1 + \int_0^x (-2)\,dt = 1 - 2x$$

$$f_2(x) = 1 + \int_0^x -2(1-2t)\,dt =$$

$$y(x) = e^{-2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2x)^k}{k!} = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2!}$$

2

1. $f: X \to \mathbb{R}$ lin funkcionál $f \in X^*$

$$\Updownarrow$$

$\exists a \in \mathbb{R}^3 \qquad f(x) = a^T x$ 4p

$$|f(x)| = |a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3| \leq$$

$$\leq |a_1 x_1| + |\cdot| + |\cdot|$$

$$\leq \|x\| \cdot \sum_1^3 |a_k|$$

$$\|f\| \leq \cancel{\|a\|} \quad \sum_1^3 |a_k|$$ 4p

$\cancel{x_j} = \cancel{\text{sign}}(\cancel{a_j}) \qquad x_j = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

$\|f\| = \qquad \sum a_j x_j = \sum |a_j|$

4p