

Név:

Pontszám:

FUNKCIONÁLANALÍZIS

1. ZH. Javítás

2013. május 31.

Munkaidő: 60 perc

Válaszait indokolja.

1. (20 pont) Legyen az alaptér $M = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, és ezen a szokásos távolság-metrikát vesszük, melyre $d(x, y) = |x - y|$. Tekintsük az alábbi $E \subset M$ részhalmazt:

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{q}, 1 \leq p \leq q \leq 100, p, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

- (a) Mérfélt-e az E halmaz? Ha igen, mennyi a mérféltéke?
(b) Melyek a belső pontjai? Melyek a határ pontjai?
(c) Zárt-e E ?
(d) Nyílt-e E ?
2. (12 pont) Mi az egységkör \mathbb{R}^2 -ben az alábbi norma mellett ($a, b > 0$ fix)? Rajzolja is le!

$$\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}}$$

3. (20 pont) Az $X = \mathbb{N}$ alaphalmazon tekintsük az $\mathcal{R} = 2^{\mathbb{N}}$ σ -algebrát és a μ a számláló mérféltéket. A számláló mérféltéket azt jelenti, hogy az $A \subset \mathbb{N}$ halmaz mérféltéke a halmaz elemeinek számával egyenlő.
- (a) Melyek lesznek a null-mérféltékű halmazok?
(b) Mit jelent egy $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálja μ szerint?
(c) $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{N}) = ?$

4. (20 pont) Döntse el, hogy az alábbi függvények $\mathcal{L}^2(0, 1)$ -beliek-e? Ha igen, határozza meg $\|\cdot\|_2$ normájukat.

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

- $g(x)$ a Dirichlet függvény (azaz racionális pontokban 1, irracionális pontokban 0 értéket vesz fel.)

- $h(x) = \frac{1}{x^2}$,

Jó munkát!