

Név:

Pontszám:

FUNKCIONÁLISANALÍZIS

1. ZH. Javítás

2012. május 23.

Munkaidő: 50 perc

1. (15 pont) Legyen

$$E = \left\{ \frac{n}{2^k} \mid k \in \mathbb{N}, n \leq 2^k \right\}.$$

- (a) Mértető-e az E halmaz? Ha igen, mennyi a mértéke?
- (b) Melyek a belső pontjai?
- (c) Melyek a határ pontjai?
- (d) Zárt-e E ?
- (e) Nyílt-e E ?

Válaszait indokolja.

2. (9 pont) Tekintsük az $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ számokból álló sorozatot. $(x_n) \subset \mathbb{R}$. Kétféle metrika mellett nézzük a határértéket:

- szokásos Euklideszi metrika,
- diszkrét metrika.

Mit tudunk mondani a konvergenciáról a fenti esetekben? Válaszát indokolja.

3. (16 pont) Igazoljuk, hogy $L^\infty(0, 1) \subset L^1(0, 1)$. Mutasson példát arra, hogy valódi tartalmazásról beszélhetünk. Válaszát indokolja.

4. (12 pont) Döntse el, hogy az alábbi függvények $L^\infty(0, 1)$ -beliek-e? Ha igen, határozza meg $\|\cdot\|_\infty$ normájukat.

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

- $g(x)$ a Dirichlet függvény (azaz racionális pontokban 1, irracionális pontokban 0 értéket vesz fel.)

Jó munkát!