

Név:

Pontszám:

FUNKCIONÁLISANALÍZIS

1. ZH.

2012. április 2.

Munkaidő: 50 perc

1. (16 pont) Legyen $H = \{x \mid 0 \leq x \leq 1, x \text{ irracionális}\}$.

- (a) MÉRhető-e? Ha igen, mennyi a mértéke?
- (b) Melyek a belső pontok?
- (c) Melyek a külső pontok?
- (d) Zárt-e H ?
- (e) Nyílt-e H ?

Válaszait indokolja.

2. (11 pont) Tekintsük a Dirichlet függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Most kétféleképp fogunk ránézni:

- (a) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ közönséges valós függvény.
- (b) Az $M = [0, 1]$ alaptéren a diszkrét metrikát értelmezve, $f : (M, d) \rightarrow \mathbb{R}$ metrikus terek közti leképezés.

Folytonos-e f a kétféle nézőpontból? Válaszát indokolja.

3. (17 pont) Az $L^p(0, 1)$ függvénytérhez tartoznak-e $p = 1/2, p = 2, p = \infty$ -re az alábbi függvények:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ q & \text{ha } x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1 \end{cases}$$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$?

Válaszát indokolja.

4. (6 pont) H egy skalárszorzat-tér, $x, y, z \in H$ páronként ortogonálisak. Igazolja, hogy

$$\|x + y + z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2.$$