Funkcionálanalízis gyakorlat 2017

9. gyakorlat

2017. április 29.

Korlátos lineáris operátorok normált terekben.

1. Ellenőrizzük, hogy az alábbi $S, T, T_0 \colon \ell^2 \to \ell^2$ lineáris operátorok korlátosak és számítsuk ki ezek normáját is.

   (a) $Sx = S(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ (jobb eltolás, right shift)

   (b) $Tx = T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots)$ (bal eltolás, left shift – delay)

   (c) $T_0\, x = T_0(x_1, x_2, x_3, \dots) := \Big(x_1, \dfrac{x_2}{2}, \dfrac{x_3}{3}, \dots, \dfrac{x_n}{n}, \dots\Big)$.

   Hogyan lehetne ezeket a leképezéseket végtelen mátrix–vektor szorzatként elképzelni?

2. Adott a $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineáris operátor, melyre $Tx = T(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$. Számítsa ki T normáját, ha az alaptérben az $\|\cdot\|_1$ majd a $\|\cdot\|_\infty$ normát tekintjük.

3. Adott $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ egy mátrix és legyen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $Tx := A \cdot x$ (az A mátrixszal való szorzás). Ezt lineáris operátorként tekintjük a normált terek között. Két esetet vizsgálunk:

   (a) $T\colon \big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty\big) \to \big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty\big)$,

   (b) $T\colon \big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1\big) \to \big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1\big)$.

   Mennyi lesz a T operátor normája az egyes esetekben?

4. Ellenőrizzük, hogy az alábbi operátorok lineárisak. Melyik leképezés lesz korlátos?

   (a) $T_1 f := \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, ahol $T_1\colon \big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big) \to \mathbb{R}$,

   (b) $T_2 f := f'$, ahol $T_2\colon \big(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty\big) \to \big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$.

5. Mutassuk meg, hogy az $If := f$ lineáris operátor

   (a) korlátos, ha $I\colon \big(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty\big) \to \big(C[-1,1], \|\cdot\|_1\big)$,

   (b) viszont nem korlátos, ha $I\colon \big(C[-1,1], \|\cdot\|_1\big) \to \big(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty\big)$.

6. Legyen $C[a,b]$-ben adott a következő integráloperátor, az úgynevezett Fredholm operátor:

   $$(Tf)(s) := \int_a^b k(s,t) f(t)\mathrm{d}t.$$

   Írjuk fel ezt az operátort és számítsuk ki a normáját, ha

   (a) $k(s,t) = s$;

   (b) $k(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } s < t, \\ 1, & \text{ha } s \geq t \end{cases}$

[HF$_1$] (c) Legyen $T\colon \big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big) \to \big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$, $(Tf)(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Ekkor mi lesz k(s,t)?

[HF$_2$] Legyen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$ lineáris operátor, ahol α a születési hónap, β a születési nap. Határozzuk meg a T operátor $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_\infty$ normáját. Kérjük a házi feladat kidolgozásában α és β értékeit külön megadni.

(*10) Legyen T lineáris operátor, és X véges dimenziós normált tér. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden $T : X \to Y$ operátor folytonos.

7. Igazoljuk, hogy az operátor-norma szubmultiplikatív, azaz ha $(X, \|\cdot\|)$ normált tér, és $S, T \in B(X)$, akkor $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

8. Legyen $T \in B(X)$, igazoljuk, hogy $\big\|T^k\big\| \leq \|T\|^k$.