Funkcionálanalízis gyakorlat 2017

8. gyakorlat
2017. április 7-10.

Ortogonális polinomrendszerek. Haar-függvények.

1. Az elsőfajú Csebisev-polinomokat a $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ képlettel definiáljuk.
   (a) Mi a T_n függvények értelmezési tartománya?
   (b) Írjuk fel a (T_n) függvénysorozat első három tagját.
   (c) Igazoljuk, hogy $n \geq 1$ esetén érvényes a $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ rekurzió.
   (d) Igazoljuk, hogy T_n egy n-edfokú polinom és számoljuk ki a főegyütthatóját.

2. Igazoljuk, hogy a (T_n) függvények ortogonális polinomrendszert alkotnak az $\mathcal{L}^2((-1,1))$ térben, ha az eredeti helyett az alábbi, a $\varrho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvénnyel súlyozott skalárszorzatot tekintjük:

$$\langle f, g \rangle_{2,\varrho} := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

3. Igazoljuk közvetlen számolással, hogy T_0 és T_1 ortogonálisak ebben a térben!

[HF$_1$] 4. Igazoljuk közvetlen számolással, hogy T_0 és T_2 ortogonálisak ebben a térben!

5. Az Hermite-féle ortogonális polinomokat az $\mathcal{L}^2_\varrho(\mathbb{R})$ téren kapjuk a $\varrho(x) = e^{-x^2}$ súlyfüggvény mellett; az ortogonalizáció végeredménye a

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

   függvényrendszer.
   (a) Ellenőrizzük, hogy ezek valóban polinomok.
   (b) Írjuk fel az első három Hermite-polinomot.
   (c) Határozzuk meg H_1 normáját.
   (d) Igazoljuk, hogy H_0 és H_1 valóban ortogonálisak a megadott súlyfüggvényre nézve.
   (e) Igazoljuk, hogy H_1 és H_2 valóban ortogonálisak a megadott súlyfüggvényre nézve.

6. Rajzoljuk fel a $H_{2,k}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ másodrendű Haar-függvényeket és igazoljuk, hogy ezek ortonormált rendszert alkotnak.

7. Igazoljuk, hogy $H_{1,1}$ ortogonális $H_{2,k}$-ra.

[HF$_2$] 8. Adjuk meg képlettel és rajzoljuk fel $H_{3,k}$-t, ahol k a gyakorlati csoport sorszáma!

9. A Laguerre ortogonális polinomokat az $\mathcal{L}^2_\varrho(\mathbb{R}^+)$ téren kapjuk a $\varrho(x) = e^{-x}$ súlyfüggvény mellett; az ortogonalizáció végeredménye a

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n e^{-x}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

   függvényrendszer.
   (a) Igazoljuk, hogy ezek valóban polinomok.
   (b) Igazoljuk, hogy L_n és L_m $(n \neq m)$ valóban ortogonális a megadott súlyfüggvényre nézve.