Funkcionálanalízis gyakorlat 2017

7. gyakorlat
2017. április -1, 3.

A Lebesgue-féle $\mathcal{L}^\infty$-tér. Gram–Schmidt-ortogonalizáció, ortogonális polinomok.

1. Legyen $(f_n) \subset H$ ortogonális függvényrenszer. Igazoljuk, hogy független is.
2. Igazoljuk, hogy $\mathcal{L}^2[0,\pi]$-ben $\{1, \sin(kx)\}$ teljes.

[HF$_1$] 3. Igazoljuk, hogy $\mathcal{L}^2[0,\pi]$-ben $\{1, \cos(kx)\}$ teljes.

4. Legyen $H = \ell^2$, $e^{(n)} := (0, \ldots, 0, \overset{n}{\smile}{1}, 0, 0, \ldots)$. Mutassuk meg, hogy $\{e^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált rendszer ℓ^2-ben. Teljes-e ez a rendszer?
5. Legyen $(e_k), k = 1, ..., n$ ortonormált rendszer a H Hilbert-térben, és jelölje $V = V_n$ az $e_1, \ldots, e_n$ vektorok által kifeszített véges dimenziós alteret.
   (a) Mutassuk meg, hogy $x \in H$ esetén az x vektor merõleges vetülete a V altérre az
   $$x_V := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \, e_i$$
   képlettel számolható ki.

   [HF$_2$] (b) Igazoljuk, hogy $x_\perp = x - x_V$ ortogonális a V altérre, azaz $\langle x_\perp, e_i\rangle = 0$, $\forall i = \overline{1, n}$.

   (c) Igazoljuk, hogy ha $y = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ a V altér egy eleme, akkor $\|x - x_V\| \le \|x - y\|$.
6. Az $\mathcal{L}^2([-1,1])$ térben tekintsük a $f_k(x) = x^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ függvényeket. Gram–Schmidt-ortogonalizációval számítsuk ki az $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ polinomrendszerből az $(P_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ortogonális polinomrendszer tagjait (Legendre-polinomok)
   (a) $k = 0$ és $k = 1$ esetben.
   (b) $k = 2$ esetén.
7. Legyen $(x_n) \subset H$ Hilbert-térben. Igazoljuk, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ H-ban, akkor $\forall y \in H$-ra:
   $$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x_0, y\rangle$$
   teljesül.
8. Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy teljes rendszer egy tetszőleges H Hilbert-térben. Mutassuk meg, hogy ez ekvivalens az alábbi tulajdonsággal: minden $x \in H$ esetén ha $\langle e_n, x\rangle = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, akkor $x = 0$.

(tartalék) 9. A képlettel megadott Legendre-polinomok:
$$P_n(x) = c_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2 - 1\right)^n, \text{ ahol } c_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!}.$$
Lássuk be, hogy P_n n-edfokú polinom, és ortogonális, azaz $\langle P_n, P_m\rangle = 0$ minden $n \neq m$-re.