Funkcionálanalízis gyakorlat 2017

6. gyakorlat

2017. március 24-27.

A Lebesgue-féle $\mathcal{L}^p$-terek.

1. Legyen $f = \sin(x)$. Melyik igaz?

$$(a) \quad f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}). \qquad\qquad (b) \quad f \in \mathcal{L}^2([0,\pi]).$$

2. Legyen $f = \sqrt{x}$. Vizsgáljuk meg, hogy $f \in \mathcal{L}^1(R)$, ha

$$(a) \quad R = [0,1]? \qquad\qquad (b) \quad R = [1,+\infty]?$$

3. Az $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ függvény milyen $\alpha > 0$ esetén lesz $\mathcal{L}^1(0,1)$, illetve $\mathcal{L}^1(1,\infty)$-beli?

4. Az $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ függvény milyen $\alpha > 0$ esetén lesz $\mathcal{L}^p(0,1)$-beli ($p \geq 1$)?

5. Legyen $1 \leq p < q < \infty$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{L}^q(0,1) \subseteq \mathcal{L}^p(0,1)$.

6. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{L}^2(0,1) \subset \mathcal{L}^1(0,1)$ esetén a tartalmazás valódi.

7. Lássuk be, hogy $p < q$ esetén sem $\mathcal{L}^p(0,\infty) \subseteq \mathcal{L}^q(0,\infty)$, sem $\mathcal{L}^p(0,\infty) \supseteq \mathcal{L}^q(0,\infty)$ nem igaz.

8. (Tartalék) Lássuk be, sem $\mathcal{L}^1(1,\infty) \subseteq \mathcal{L}^2(1,\infty)$, sem $\mathcal{L}^2(1,\infty) \supseteq \mathcal{L}^1(1,\infty)$ nem igaz.

9. (K.Saxe könyv, Exc 3.6.9. p.73.) Tekintsük az $\mathcal{L}^p[-1,1]$ teret, s benne az $f(x) = 1 + x$ és $g(x) = 1 - x$ függvényeket.

   (a) Igazoljuk, hogy $\|f\|_p^p = \|g\|_p^p = \frac{2^{p+1}}{p+1}, \quad \|f+g\|_p^p = 2^{p+1} \quad \|f-g\|_p^p = \frac{2^{p+1}}{p+1}$.

   (b) Ez alapján lássuk be, hogy például $p = 1$ esetén nem teljesül a paralelogramma szabály.

   Mi következik ebből?

[HF$_1$] 10. Legyen $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$. Vizsgáljuk meg, hogy $\mathcal{L}^p(R)$-be tartoznak-e ezek a függvények $p = 1$ illetve $p = 2$ esetben, ha

$$(a) \quad R = [0,1], \qquad\qquad (b) \quad R = [1,+\infty).$$

11. Az alábbi függvények közül melyek lesznek $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$-ben?

$$(a) \quad f(x) = \cos x \qquad\qquad (b) \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ q & x = \dfrac{p}{q} \text{ racionális} \end{cases} \qquad\qquad (c) \quad h(x) = \sqrt{|x|}$$

12. Legyen $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = 2^{\mathbb{N}}$, és legyen μ a számláló mérték. Melyek a nullmértékű halmazok $X = \mathbb{N}$-ben? Mit jelent, hogy két függvény m.m. egyenlő? Hogyan értelmezhető az integrál ebben a mértékben?

13. Lássuk be, hogy $\ell^p = \mathcal{L}^p(\mathbb{N})$ minden $1 \leq p < \infty$ esetén.

[HF$_2$] 14. Lássuk be, hogy az állítás $p = \infty$ esetén is teljesül, azaz $\ell^\infty = \mathcal{L}^\infty(\mathbb{N})$.

(∗8) $0 < p < 1$ esetén is definiálható $\mathcal{L}^p$ és $\|\cdot\|_p$ hasonlóan ahhoz, ahogyan azt $1 \leq p < \infty$ mellett megtettük. Igazoljuk (megfelelő ellenpéldával), hogy ebben az esetben $\|\cdot\|_p$ nem elégíti ki a háromszög-egyenlőtlenséget, ezért nem norma.

(∗9) Legyenek $p, q > 1$ Hölder konjugáltak, azaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Igazoljuk az általánosított számtani-mértani egyenlőtlenséget:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{1}$$

Ez alapján lássuk be a Hölder-egyenlőtlenséget.

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{2}$$