Funkcionálanalízis gyakorlat 2017

5. gyakorlat

2017. március 17-20.

Mérhető függvények.

1. $\mathcal{M}$ a Lebesgue-mérhető halmazok σ-gyűrűje. Az $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt mérhetőnek nevezzük, ha

   (a) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < a\} \in \mathcal{M}$.

   Igazoljuk, hogy az f mérhetősége ugyanazt jelenti, mint az alábbi feltételek bármelyike:

   (b) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \le a\} \in \mathcal{M}$;

   (c) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > a\} \in \mathcal{M}$;

   [HF$_1$] (d) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \ge a\} \in \mathcal{M}$. (A HF-ben a $(c) \equiv (d)$ ekvivalenciát igazold)

2. Igazoljuk, hogy ha f mérhető, akkor minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = a\} \in \mathcal{M}$.
3. Igazoljuk, hogy ha f folytonos, akkor mérhető.
4. Igazoljuk, hogy ha f és g mérhető függvények, akkor az $(f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ függvény is mérhető.
5. Igazoljuk, hogy ha f mérhető, akkor $|f|$ is mérhető. Igaz-e ennek a megfordítása?
6. Legyenek f és g mérhető függvények, lássuk be, hogy ekkor az $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\}$ és az $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$ halmazok mérhetők.

Lebesgue-integrál.

7. Igazoljuk a karakterisztikus függvények alábbi tulajdonságait:

$$\chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A\cap B}, \qquad \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \chi_{A\cup B}, \qquad |\chi_A - \chi_B| = \chi_{A\triangle B} \tag{1}$$

8. Mutassuk meg, hogy a majdnem mindenütt való egyenlőség ekvivalencia-reláció.
9. Igazoljuk, hogy ha f és g folytonos függvények és $f = g$ m.m., akkor $f = g$ mindenhol.
10. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos, mérhető függvény. Lássuk be, hogy f Lebesgue-integrálható.
11. Mutassuk meg, hogy ha $f = g$ m.m., akkor bármely $A \in \mathcal{M}$ halmazra $\int_A f dm = \int_A g dm$.

[HF$_2$] 12. Igazoljuk, hogy ha $m(E) < \infty$ és $a \le f(x) \le b$, akkor $a \cdot m(E) \le \int_E f dm \le b \cdot m(E)$.

13. Igazoljuk, hogy ha $f \in \mathcal{L}$, akkor $|f| \in \mathcal{L}$ és $\left|\int_E f dm\right| \le \int_E |f| dm$
14. Igazoljuk, hogy Lebesgue integrál esetén ez fordítva is igaz, azaz, ha $|f| \in \mathcal{L}$ és f mérhető, akkor $f \in \mathcal{L}$ is teljesül.

(∗5) Legyen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ a következő függvény (lásd Ábra 1.):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ n & x \in C_{n-1} \backslash C_n \ (n\text{-edik lépésben marad ki}) \end{cases}$$

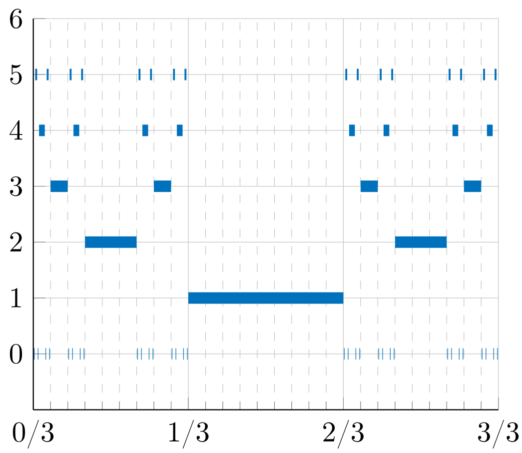
ahol $C_0 = [0, 1]$, $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, stb.. Határozzák meg a Lebesgue-integrálját ennek a furcsa függvénynek. Riemann integrálható-e a függvény?

(∗6) Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető. Definiáljuk az alábbi $F : X \to \mathbb{R}$ függvényt: $F(t) = m(\{x \mid f(x) < t\})$. Igazoljuk, hogy F monoton növő, balról folytonos, és

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = m(X)$$

(F elnevezése: f *eloszlásfüggvénye.*)

(∗7) Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Ha $\int_A f dm = 0$, $\forall A \subseteq R$, akkor igazold, hogy $f(x) = 0$ m.m.



Ábra 1. Az $f(x)$ függvényt így közelítjük:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in C_n \\ k & x \in C_{k-1} \backslash C_k, \ k = \overline{1, n} \end{cases}$$

$f_n \to f$, az ábrán $f_6(x)$ látható.