Funkcionálanalízis gyakorlat 2017

4. gyakorlat
2017. március 10.

(előző heti anyag) Nyílt és zárt halmazok, kompakt halmazok metrikus térben.

1. Lássuk be, hogy $\emptyset$ és X nyílt.
2. Igazoljuk, hogy diszkrét metrikus térben minden halmaz nyílt és zárt.
3. Mik a kompakt halmazok a diszkrét metrikus térben? Adjunk példákat kompakt és nem kompakt halmazokra.

Lebesgue-mérték bevezetése. Cantor-halmaz.

4. Legyen $\mathcal{R}$ halmazgyûrû. Igazoljuk, hogy ha $A, B \in \mathcal{R}$, akkor az is következik, hogy $A \cap B \in \mathcal{R}$.
5. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{R}$ σ-gyűrű, akkor $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$ esetén $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$.
6. A Lebesgue mérték konstrukciója során az egyszerű halmazokon ($\mathcal{E}$-ben) definiáltuk az m halmazfüggvényt. Lássuk be, hogy $m : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ $\sigma-$additív, valamint, hogy $\mathcal{E}$ nem $\sigma-$algebra.
7. Igazoljuk, hogy a külső mérték (m^*) megszorítása $\mathcal{E}$-re megegyezik az m halmazfüggvénnyel.
8. Igazoljuk, hogy ha $A = \mathbb{Q}$, akkor A nullmértékû.

[HF$_1$] 9. Adott $A = \left\{ \frac{p}{2^k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}, 1 \le p \le 2^k - 1 \right\}$ halmaz. Mérhető-e ez a halmaz. Ha igen, mennyi a mértéke?

[HF$_2$] 10. (Mérték monotonítása) Legyen $A \subset B \subset \mathbb{R}$ két mérhető halmaz. Igazoljuk, hogy $m(A) \le m(B)$.

11. (Mérték nem elfajuló) Igazoljuk, hogy ha E nem üres, nyílt halmaz, akkor $m(E) \neq 0$ (azaz $m(E) > 0$).
12. Legyen $A = \{x \in [0,1],\ x \text{ irracionális szám}\}$. Igazoljuk, hogy A mérhető. Mennyi $m(A)$?
13. Igazoljuk, hogy a Cantor-halmaz nullmértékû.
14. Mutassuk meg, hogy a Cantor-halmaz elemszáma nem megszámlálható.
15. Mutassuk meg, hogy $x = 1/4$ eleme a Cantor-halmaznak.

($*$4) Igazoljuk, hogy ha C a Cantor-halmaz, akkor $C - C := \{c_1 - c_2 \mid c_1, c_2 \in C\} = [-1, 1]$.

16. Igazoljuk, hogy ha $A \subset \mathcal{M}$, akkor A^c is mérhető.

(jövő heti anyag) Mérhető függvények.

17. $\mathcal{M}$ a Lebesgue-mérhető halmazok σ-gyûrûje. Az $f \colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt mérhetőnek nevezzük, ha
    (a) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < a\} \in \mathcal{M}$.

    Igazoljuk, hogy az f mérhetősége ugyanazt jelenti, mint az alábbi feltételek bármelyike:

    (b) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \le a\} \in \mathcal{M}$;
    (c) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > a\} \in \mathcal{M}$;
    (d) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \ge a\} \in \mathcal{M}$.
18. Igazoljuk, hogy ha f mérhető, akkor minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = a\} \in \mathcal{M}$.
19. Igazoljuk, hogy ha f folytonos, akkor mérhető.

20. Igazoljuk, hogy ha f és g mérhető függvények, akkor az $(f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ függvény is mérhető.

21. Igazoljuk, hogy ha f mérhető, akkor $|f|$ is mérhető. Igaz-e ennek a megfordítása?

22. Legyenek f és g mérhető függvények, lássuk be, hogy ekkor az $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\}$ és az $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$ halmazok mérhetők.