Funkcionálanalízis gyakorlat 2017

3. gyakorlat

2017. március 3-6.

Nyílt és zárt halmazok, kompakt halmazok metrikus térben.

(Ism.) (a) Egy $F \subset X$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden $(x_n) \subset F$ konvergens sorozatra teljesül, hogy $\lim x_n \in F$.

(b) Az $F \subset X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden $(x_n) \subset F$ sorozatból kiválasztható konvergens (x_{n_k}) részsorozat, melyre $\lim x_{n_k} \in F$.

1. Legyen (X, d) metrikus tér. Igazoljuk, $F \subset X$ pontosan akkor zárt (vagyis minden torlódási pontját tartalmazza), ha $X \setminus F$ nyílt.
2. Lássuk be, hogy $\emptyset$ és X nyílt.
3. Bizonyítsuk be, hogy akárhány nyílt halmaz uniója nyílt.
4. Bizonyítsuk be, hogy véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.
5. A számegyenesen adjunk példákat nyílt, zárt, egyszerre nyílt és zárt, valamint se nem nyílt se nem zárt halmazokra.
6. Igazoljuk, hogy diszkrét metrikus térben minden halmaz nyílt és zárt.
7. Mik a kompakt halmazok a diszkrét metrikus térben? Adjunk példákat kompakt és nem kompakt halmazokra.
8. Igazoljuk, hogy metrikus tér kompakt részhalmaza korlátos.
9. Igazoljuk, hogy metrikus tér kompakt részhalmaza zárt.
10. Lássuk be, hogy ℓ^∞-ben a $\overline{B}_1(0) := \{x \in \ell^\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}$ zárt egységgömb nem kompakt halmaz (noha korlátos és zárt).

[HF$_1$] 11. Lássuk be, hogy ℓ^1-ben a $\overline{B}_1(0) := \{x \in \ell^1 : \|x\|_1 \leq 1\}$ zárt egységgömb nem kompakt halmaz.

Szeparábilis metrikus terek.

12. Legyen $X = \mathbb{R}$.
    (a) Mutassuk meg, hogy szeparábilis az euklideszi normával.
    (b) Mutassuk meg, hogy nem szeparábilis a diszkrét metrikával.
13. Legyen $X = \mathbb{R}^2$.
    (a) Mutassuk meg, hogy szeparábilis az euklideszi normával.
    (b) Mutassuk meg, hogy nem szeparábilis a diszkrét metrikával.

[HF$_2$] Mutassuk meg, hogy ℓ^∞ nem szeparábilis.

Teljes metrikus terek, Banach-terek, Hilbert-terek.

14. Igazoljuk, hogy $\left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ normált tér teljes.
15. Igazoljuk, hogy $\left(C[0,1], \|\cdot\|_2\right)$ normált tér nem teljes.
16. Melyek a konvergens sorozatok a diszkrét metrikus térben? Teljes-e ez a tér?

[HF$_3$] Igazoljuk, hogy $\left(C[0,1], \|\cdot\|_1\right)$ normált tér sem teljes, ahol

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$