

3. gyakorlat

2017. március 3-6.

Nyílt és zárt halmazok, kompakt halmazok metrikus térben.

- (Ism.) (a) Egy $F \subset X$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden $(x_n) \subset F$ konvergens sorozatra teljesül, hogy $\lim x_n \in F$.
- (b) Az $F \subset X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden $(x_n) \subset F$ sorozatból kiválasztható konvergens (x_{n_k}) részsorozat, melyre $\lim x_{n_k} \in F$.
- Legyen (X, d) metrikus tér. Igazoljuk, $F \subset X$ pontosan akkor zárt (vagyis minden torlódási pontját tartalmazza), ha $X \setminus F$ nyílt.
 - Lássuk be, hogy \emptyset és X nyílt.
 - Bizonyítsuk be, hogy akárhány nyílt halmaz uniója nyílt.
 - Bizonyítsuk be, hogy véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.
 - A számegegyenesen adjunk példákat nyílt, zárt, egyszerre nyílt és zárt, valamint se nem nyílt se nem zárt halmazokra.
 - Igazoljuk, hogy diszkrét metrikus térben minden halmaz nyílt és zárt.
 - Mik a kompakt halmazok a diszkrét metrikus térben? Adjunk példákat kompakt és nem kompakt halmazokra.
 - Igazoljuk, hogy metrikus tér kompakt részhalmaza korlátos.
 - Igazoljuk, hogy metrikus tér kompakt részhalmaza zárt.
 - Lássuk be, hogy ℓ^∞ -ben a $\overline{B}_1(0) := \{x \in \ell^\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}$ zárt egységömb nem kompakt halmaz (noha korlátos és zárt).
 - Lássuk be, hogy ℓ^1 -ben a $\overline{B}_1(0) := \{x \in \ell^1 : \|x\|_1 \leq 1\}$ zárt egységömb nem kompakt halmaz.

Szeperábilis metrikus terek.

- Legyen $X = \mathbb{R}$.
 - Mutassuk meg, hogy szeperábilis az euklideszi normával.
 - Mutassuk meg, hogy nem szeperábilis a diszkrét metrikával.
- Legyen $X = \mathbb{R}^2$.
 - Mutassuk meg, hogy szeperábilis az euklideszi normával.
 - Mutassuk meg, hogy nem szeperábilis a diszkrét metrikával.

[HF1] Mutassuk meg, hogy ℓ^∞ nem szeperábilis.

Teljes metrikus terek, Banach-terek, Hilbert-terek.

- Igazoljuk, hogy $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ normált tér teljes.
- Igazoljuk, hogy $(C[0, 1], \|\cdot\|_2)$ normált tér nem teljes.
- Melyek a konvergens sorozatok a diszkrét metrikus térben? Teljes-e ez a tér?

[HF2] Igazoljuk, hogy $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ normált tér sem teljes, ahol

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$