

# FUNKCIONÁLANALÍZIS GYAKORLAT 2017

## 2. gyakorlat

2017. február 24-27.

Sorozatterek.  $C[a, b]$ . Teljes metrikus terek, Banach-terek, Hilbert-terek.

1. Legyen  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $y_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ,  $z_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ,  $v_n = \frac{1}{2^n}$ . Melyik sorozattérben van az  $x = (x_n)$ ,  $y = (y_n)$ ,  $z = (z_n)$  illetve a  $v = (v_n)$  sorozat? Mennyi a normájuk?
2. Az alábbi  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatok közül melyik tartozik  $c$ -be,  $c_0$ -ba,  $\ell^1$ -be,  $\ell^2$ -be? Mi lesz ezek normája az adott térben?

$$(a) x \equiv 1 \quad (b) x_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad (c) x_n = \frac{1}{n^2} \quad (1)$$

3. Mutassuk meg, hogy  $\ell^1 \subset \ell^3$  és a tartalmazás valódi. Hogyan viszonyul ezekhez tartalmazás szempontjából az  $\ell^\infty$  sorozattér?
4. Igazoljuk, hogy a  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  skalárszorzat térben teljesül a következő állítás:  
ha  $\langle x, y \rangle = 0$ , akkor  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .
5. Legyen  $(X, \|\cdot\|)$  normált tér. Tegyük fel, hogy  $X$  normája skalárszorzatból származik. Lássuk be, hogy ekkor minden  $x, y \in X$ -re teljesül az  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$  ún. parallelogramma-szabály.
- (\*3) Lássuk be az előző feladat állításának fordítottját, vagyis, ha a parallelogramma szabály teljesül minden  $x, y \in X$ -re, akkor  $(X, \|\cdot\|)$  normája skalárszorzatból származtatható.
6. Mennyi az  $f(x) = x$  és a  $g(x) = \sqrt{x}$  függvények távolsága  $C[0, 1]$ -ben a sup-norma és  $\|\cdot\|_2$  szerint?

[HF<sub>1</sub>] 7. Mennyi az  $f(x) = x$  és a  $g(x) = x^2$  függvények távolsága  $C[0, 1]$ -ben a sup-norma és  $\|\cdot\|_2$  szerint?

8. Igazoljuk, hogy az alábbi normák:

(a)  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$

[HF<sub>2</sub>] (b)  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$

nem származtathatók skalárszorzatból.

9. Igazoljuk, hogy  $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  tér normája nem származtatható skalárszorzatból.

10. Tekintsük a  $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  normált teret. Mutassuk meg, hogy ha  $f_n, f \in C[0, 1]$ , akkor  $f_n \rightarrow f$  a  $\|\cdot\|_\infty$ -norma szerint pontosan akkor igaz, ha  $f_n \rightarrow f$  egyenletesen  $[0, 1]$ -n, vagyis a normabeli konvergencia azonos az egyenletes konvergenciával.

Nyílt és zárt halmazok, kompakt halmazok metrikus térben.

11. Legyen  $(M, d)$  metrikus tér. Igazoljuk,  $E \subset M$  pontosan akkor zárt (vagyis minden torlódási pontját tartalmazza), ha  $M \setminus E$  nyílt.

12. Bizonyítsuk be, hogy akárhány nyílt halmaz uniója nyílt.

[HF<sub>3</sub>] 13. Bizonyítsuk be, hogy akárhány zárt halmaz metszete zárt.

14. Bizonyítsuk be, hogy véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.