Funkcionálanalízis gyakorlat 2017

2. gyakorlat
2017. február 24-27.

Sorozatterek. $C[a, b]$. Teljes metrikus terek, Banach-terek, Hilbert-terek.

1. Legyen $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $v_n = \frac{1}{2^n}$. Melyik sorozattérben van az $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $z = (z_n)$ illetve a $v = (v_n)$ sorozat? Mennyi a normájuk?

2. Az alábbi $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok közül melyik tartozik c-be, c_0-ba, ℓ^1-be, ℓ^2-be? Mi lesz ezek normája az adott térben?
$$\text{(a) } x \equiv 1 \qquad \text{(b) } x_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \qquad \text{(c) } x_n = \frac{1}{n^2} \tag{1}$$

3. Mutassuk meg, hogy $\ell^1 \subset \ell^3$ és a tartalmazás valódi. Hogyan viszonyul ezekhez tartalmazás szempontjából az ℓ^∞ sorozattér?

4. Igazoljuk, hogy a $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ skalárszorzat térben teljesül a következõ állítás:
ha $\langle x, y\rangle = 0$, akkor $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

5. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér. Tegyük fel, hogy X normája skalárszorzatból származik. Lássuk be, hogy ekkor minden $x, y \in X$-re teljesül az $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$ ún. parallelogramma-szabály.

(∗3) Lássuk be az elõzõ feladat állításának fordítottját, vagyis, ha a parallelogramma szabály teljesül minden $x, y \in X$-re, akkor $(X, \|\cdot\|)$ normája skalárszorzatból származtatható.

6. Mennyi az $f(x) = x$ és a $g(x) = \sqrt{x}$ függvények távolsága $C[0, 1]$-ben a sup-norma és $||\cdot||_2$ szerint?

[HF$_1$] 7. Mennyi az $f(x) = x$ és a $g(x) = x^2$ függvények távolsága $C[0, 1]$-ben a sup-norma és $||\cdot||_2$ szerint?

8. Igazoljuk, hogy az alábbi normák:

   (a) $\big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty\big)$

   [HF$_2$] (b) $\big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1\big)$

   nem származtathatók skalárszorzatból.

9. Igazoljuk, hogy $\big(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty\big)$ tér normája nem származtatható skalárszorzatból.

10. Tekintsük a $\big(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty\big)$ normált teret. Mutassuk meg, hogy ha $f_n, f \in C[0, 1]$, akkor $f_n \to f$ a $\|\cdot\|_\infty$-norma szerint pontosan akkor igaz, ha $f_n \to f$ egyenletesen $[0, 1]$-n, vagyis a normabeli konvergencia azonos az egyenletes konvergenciával.

(∗4) Igazoljuk $\mathbb{R}^n$ véges vektortérben, hogy $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p$.

Nyílt és zárt halmazok, kompakt halmazok metrikus térben.

11. Legyen (M, d) metrikus tér. Igazoljuk, $E \subset M$ pontosan akkor zárt (vagyis minden torlódási pontját tartalmazza), ha $E \setminus M$ nyílt.

12. Bizonyítsuk be, hogy akárhány nyílt halmaz uniója nyílt.

[HF$_3$] 13. Bizonyítsuk be, hogy akárhány zárt halmaz metszete zárt.

14. Bizonyítsuk be, hogy véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.