Funkcionálanalízis gyakorlat 2017

1. gyakorlat
2017. február 17-20.

Ismétlés. Alapfogalmak: metrikus, normált és skalárszorzat terek.

1. Legyen X egy tetszőleges halmaz és $x, y \in X$-re legyen
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y, \\ 1, & \text{ha } x \neq y. \end{cases}$$
Mutassuk meg, hogy (X, d) metrikus tér, melyet diszkrét metrikus térnek nevezünk.

2. Metrikát definiál-e $\mathbb{R}^n$-en a $d(x,y) := \#\{j : x_j \neq y_j\}$ függvény (Vagyis azon indexek számát $d(x,y)$ jelenti, ahány komponensben különbözik az x és y vektor.)

3. Mutassuk meg, hogy az alábbi $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények normát definiálnak $\mathbb{R}^n$-en:
$$\text{(a)} \quad \|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \text{(b)} \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}, \qquad \text{(c)} \quad \|x\|_\infty := \underset{i=1,\dots,n}{max} \{|x_i|\}.$$
Írjuk fel a belőlük származtatható metrikát!

4. Legyen $x = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, számítsuk ki a hosszát a fenti normákat használva.

[HF$_1$] Igaz-e, hogy az $\|x\| := \max\{|2x_1 - x_2|, |ax_1|\}$ függvény egy norma $\mathbb{R}^2$-n, ahol a =csoport sorszám?

5. Rajzoljuk le $\mathbb{R}^2$-ben a $\|\cdot\|_i$ normák ($i = 1, 2, \infty$) szerinti $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_i < 1\}$ egységgömböket.

[HF$_2$] Rajzoljuk le az 5. feladatban definiált norma szerinti egységgömböt.

6. Igaz-e, hogy minden
   (a) normált tér egyben metrikus tér is?
   (b) metrikus tér metrikája valamilyen normából származtatható?

7. Adott $[a, b] \subset \mathbb{R}$ véges zárt intervallum. Legyen $X = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, \text{ folytonos }\}$.
   (a) Igazoljuk, hogy X vektortér.
   (b) Igazoljuk, hogy az alábbi függvények normák:
$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|, \qquad \|f\|_2 := \left(\int_a^b \left|f^2(x)\right| \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

8. Ellenőrizzük, hogy minden skalárszorzat-térből kaphatunk normált teret a $\|x\| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ norma bevezetésével.

9. Adottak az (M, d_M) és (N, d_N) metrikus terek és egy függvény $f : M \to N$. Gondoljuk meg, hogy ha a képtérben a diszkrét metrika van, akkor csak a konstans függvény folytonos.

($*$1) Meg lehet-e adni olyan metrikus teret, amelyben léteznek olyan x, y pontok és olyan $0 < r < R$ számok, hogy $B_R(x) \subsetneq B_r(y)$?

($*$2) Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^n$-ben $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.