Funkcionálanalízis gyakorlat 2017

12. gyakorlat
2017. május 19.
Megoldások

Disztribúciók.

1. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Igazoljuk, hogy $T_f\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$T_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

valóban disztribúció.

Megoldás.

(a) *Jól értelmezett*, hiszen minden φ egy véges intervallumon kívül 0, így korlátos intervallomon kell folytonos függvényt integrálni.

(b) *Lineáris* φ-ben: valóban, ez minden integrál egyik alaptulajdonsága.

(c) *Folytonos a funkcionál*, hiszen az egyenletes konvergencia miatt az integrál (amit csak véges intervallumon kell számolanni) és határérték felcserélhetők:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\right)\mathrm{d}x$$

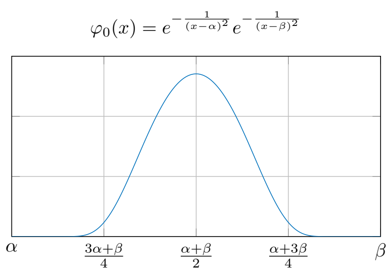
2. Igazoljuk, hogy különbözõ folytonos függvényekhez különbözõ reguláris disztribúció tartozik.

Megoldás.
Indirekt módon tegyük fel, hogy az f és g függvényekhez ugyanaz a disztribúció tartozik. Ekkor $T_f(\varphi) = T_g(\varphi)$ minden $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vizsgáló függvényre. Más szóval a $h = f - g \neq 0$ folytonos függvényhez az azonosan 0 disztribúcó tartozik. Itt felhasználjuk azt az azonosságot, hogy

$$T_h(\varphi) = T_{f-g}(\varphi) = T_f(\varphi) - T_g(\varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Mivel $h \neq 0$, ezért $\exists(\alpha,\,\beta)$, melyre $|h(x)| > \varepsilon$ az egész intervallumon valamilyen alkalmas $\varepsilon > 0$ mellett. Viszont meg lehet adni olyan végtelen sokszor differenciálható $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ függvényt, mely az $(\alpha,\,\beta)$ intervallumon kívül 0 és annak belsejében pozitív. Például:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-\alpha)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{(x-\beta)^2}} & x \in (\alpha,\,\beta) \\ 0 & x \notin (\alpha,\,\beta) \end{cases}$$



Ekkor

$$|T_h(\varphi_0)| > \varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx > 0,$$

ami ellentmondás.

(a) Igazoljuk, hogy δ disztribúció.

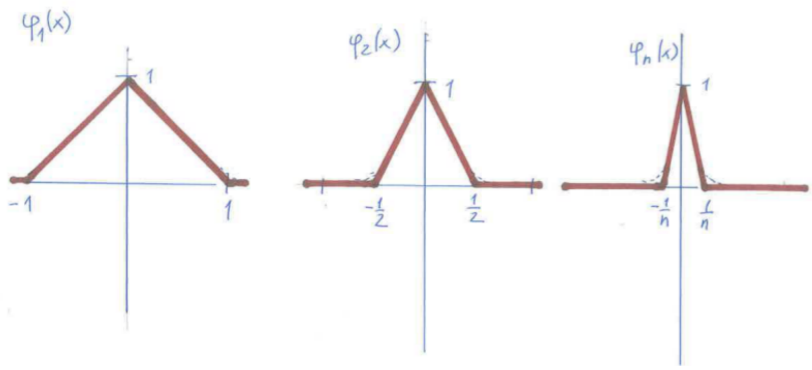
Megoldás.
Triviális módon látható, hogy a fenti funkcionál valóban lineáris és sorozatfolytonos.

(b) A δ-disztribúció nem reguláris disztribúció.

Megoldás.
Indirekt módon tegyük fel, hogy reguláris, azaz létezik $\delta(x)$ folytonos függvény, melyre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Az alábbi ábrán látható függvényekre $\varphi_n(0) = 1$ mindnen n-re, ezért $\delta(\varphi_n) \equiv 1$.

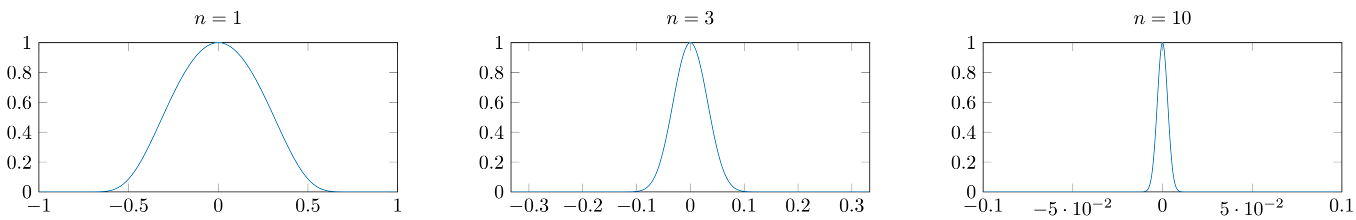


Másrészt

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{-1/n}^{1/n} \delta(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \frac{2}{n} M,$$

ahol $M = \max\{|\delta(x)| \ : \ |x| \le 1\}$. Tehát $\lim_{n\to\infty} \delta(\varphi_n) = 0$, ami elletmond annak a kiindulópontnak, hogy $\delta(\varphi_n) \equiv 1$. Az előző ábrán látható próbafüggvények hiányossága, hogy nem végtelen sokszort differenciálhatóak, ezért legyen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-\frac{1}{n})^2}} \cdot e^{-\frac{1}{(x+\frac{1}{n})^2}} \cdot e^{2n^2} & \text{ha } x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \tag{1}$$



Ezen függvénysorozatra is igaz az, hogy $\varphi_n(0) = 1$ továbbá a φ_n függvény alatti terület itt is felülbecsülhető $\frac{2}{n}$-el.

3. Legyen $f(x) = \chi_{\mathbb{N}}(x)$. Határozzuk meg ∂T_f-et.

4. Igazoljuk, hogy $\partial T_{\mathrm{sgn}} = 2\delta$, ahol sgn az elõjelfüggvény.

5. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{ha } x > 1, \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

   Határozzuk meg T_f disztribúció értelemben vett elsõ és második deriváltját.

6. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x < 0, \\ 1 + 1 & \text{ha } x \ge 1. \end{cases}$$

   Határozzuk meg f gyenge deriváltját.