Funkcionálanalízis gyakorlat 2017

11. gyakorlat

2016. május 12-15.

Folytonos lineáris funkcionálok. Adjungált operátorok Hilbert térben.

1. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, akkor létezik $a \in \mathbb{R}^n$, hogy $f(x) = a^T x$.
2. Igazoljuk, hogy $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.
3. Tekintsük az ℓ^2 Hilbert-térben az $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot. Mutassuk meg, hogy (e^n) nem konvergens a normában, de gyengén tart 0-hoz.
4. Bizonyítsuk be az adjungálás mûveleti szabályait:

[HF$_1$] $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ (a) $(AB)^* = B^* A^*$, $A^{**} = A$.

5. Legyen $A \in B(H)$, igazoljuk, hogy ekkor A^*A önadjungált operátor.
6. Igazoljuk, hogy bármely $A \in B(H)$ esetén $\|A^*\| = \|A\|$.
7. Legyen H Hilbert-tér, $T \in B(H)$. Igazoljuk, hogy ekkor
   (a) $\|T^*T\| \leq \|T\|^2$,
   (b) $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$.

[HF$_2$] Igazoljuk, hogy ha A önadjungált operátor, akkor $\left\|A^2\right\| = \|A\|^2$.

8. Legyen $T\colon \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $(Tf)(x) := f(-x)$. Igazoljuk, hogy T önadjungált.

($*$) Igazoljuk, hogy a 4. feladat állítása általában is igaz: végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-térben egy $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer gyengén tart a nullvektorhoz, de normában nem konvergens.

9. Adott egy H Hilbert tér és ennek egy $x_0 \in H$ rögzítette pontja. Legyen $H_0 = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathrm{R}\}$ zárt altér, illetve $P : H \to H$ operátor legyen a H_0-ra vett projekció.
   (a) Számítsd ki P normáját.
   (b) Igazold, hogy $\lambda = 2 \notin \sigma(P)$.
   (c) Számítsd ki P spektrumát.
10. Adott H Hilbert tér fölött legyen egy tetszőleges $P : H \to H$ projekció.
   (a) Igazoljuk, hogy $\sigma(P) = \{0, 1\}$.
   (b) Igazoljuk, hogy $I - P$ is projekció.
11. Adott $T : \mathcal{L}^2[0,1] \to \mathcal{L}^2[0,1]$ operátor, melyre $(Tu)(s) = \displaystyle\int_0^1 K(s,t)u(t)\mathrm{d}t$. Igazoljuk, hogy T operátor adjungáltja $(T^*u)(s) = \displaystyle\int_0^1 K(t,s)u(t)\mathrm{d}t$.