

# FUNKCIONÁLANALÍZIS GYAKORLAT 2017

## 10. gyakorlat 2017. május 5-8.

Korlátos lineáris operátorok spektruma és sajátértékei.

1. Igazoljuk, hogy  $T \in B(X)$  operatorátor akkor és csak akkor invertálható, ha  $Tx = 0$  csak  $x = 0$  esetén fordulhat elő.
2. (Ismétlés) Legyen  $T \in B(X)$ , igazoljuk, hogy a  $\sigma(T)$  spektrum korlátos.
3. Igazoljuk, hogy a  $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ,

$$Tx = T(x_1, x_2, x_3, \dots) := \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right)$$

operátor nem invertálható.

4. Legyen  $S: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  olyan lineáris operátor, melynek végtelen mátrix reprezentációjában a mátrix diagonális. Bizonyítsuk be, hogy  $S$  akkor és csak akkor korlátos, ha a diagonális-beli elemek sorozata korlátos.
  5. Határozzuk meg  $\ell^2$ -ben a bal-eltolás operátorának spektrumát. A spektrum mely elemei lesznek sajátértékek is egyben?
- [HF<sub>1</sub>] Határozzuk meg  $\ell^2$ -ben a jobb-eltolás operátorának spektrumát. A spektrum mely elemei lesznek sajátértékek is egyben?

6. Határozzuk meg a  $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ,

$$Tx = T(x_1, x_2, x_3, \dots) := \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right)$$

operátor spektrumát. Mik lesznek a sajátértékek?

- [HF<sub>2</sub>] Határozzuk meg a  $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ,

$$Tx = T(x_1, x_2, x_3, \dots) := \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{2}{3}x_3, \dots, \frac{n-1}{n}x_n, \dots\right)$$

operátor spektrumát. Mik lesznek a sajátértékek?

7. Adott  $H$  Hilbert-tér és  $\alpha \in \mathbb{R}$  valós szám. Legyen  $A: H \rightarrow H$ ,  $Ax := \alpha x$  az  $\alpha$ -val való szorzás operátora. Mi az operátor normája és a spektruma?
8. Legyen  $C[0, 1]$ -ben  $\mu: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  egy kitüntetett függvény. Az  $A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  operátor egy  $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  elemhez rendelt képét így adjuk meg:

$$(Ax)(t) := \mu(t)x(t), \quad t \in [0, 1].$$

Számítsuk ki az  $A$  operátornak a spektrumát, ha

- (a)  $\mu(t) = t$ ;
- (b)  $\mu \in C[0, 1]$  tetszőleges.

Mik lesznek a sajátértékek?

9.  $X = C[0, 1]$  esetén  $B(X)$ -ben tekintsük azt a  $T$  operátort, mely egy  $(x(t))$  elemhez  $(t^2 \cdot x(t))$  elemet rendeli. Mi lesz az operátor spektruma?
- (\*11) Legyen  $H$  Hilbert-tér,  $A, B \in B(H)$ . Mutassuk meg, hogy  $\sigma(AB)$  és  $\sigma(BA)$  nemnulla elemei megegyeznek.