Computer controlled systems

Lecture 1

version: 2021.09.13. – 09:01:07

1. Mathematical summary

1.1. Abelian group

1. **Group** $(H, +)$ – set H, and an operation defined on H: $+$
   - closure – for any a and b in H their „sum” $a + b$ is also an element of H
   - commutativity – $\forall a, b \in H \quad a + b = b + a$
   - associativity – $\forall a, b, c \in H \quad (a + b) + c = a + (b + c)$
   - there is an identity element – $\exists 0 \in H\ \forall a \in H \quad a + 0 = a$
   - for any element there exists an inverse element – $\forall a \in H\ \exists a^{-1} \in H \quad a + a^{-1} = 0$
2. **Field** $K = (H, +, \cdot)$ – set H and to operations (additive) $+$ and multiplicative $\cdot$
   - $(H, +)$ Abelian group
   - $(H \backslash \{0\}, \cdot)$ Abelian group
   - multiplication is distributive with respect to addition – $\forall a, b, c \in H \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
3. **Vector space V defined on a field K**

   (a) $(V, +)$ is an Abelian group

   (b) Multiplication with a scalar $K \times V \to V$ – $\alpha \in K$, $\boldsymbol{v} \in V$, $\alpha \cdot \boldsymbol{v} \in V$
   - $\forall \boldsymbol{v} \in V$ and $\forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{v} = \alpha \cdot \boldsymbol{v} + \beta \cdot \boldsymbol{v}$
   - $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ and $\forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha \cdot \boldsymbol{u} + \alpha \cdot \boldsymbol{v}$
   - $\forall \boldsymbol{v} \in V$ and $\forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \cdot \beta)\boldsymbol{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{v})$
   - $1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, where $1 \in K$ the identity element for multiplication

   Examples for vector spaces:

   (a) $\mathbb{R}^n$

   (b) $K^{n \times k}$: $n \times k$ matrices defined on field K

   (c) $K[x]$: polynomials defined on field K

   (d) $K[x]$: where $\forall f \in K[x]$, $\deg(f) \leq n$

   (e) $C[0, 1]$: real valued continuous function defined on the interval $[0, 1]$

   (f) $V = P(H)$: set of every subset of finite set H,
   defined on a finite field $K = \{0, 1\}$ with two elements
   $\forall A, B \in H$: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ and $0 \cdot A = \emptyset$, $1 \cdot A = A$

1.2. Homogeneous linear transformation

V and W vector space defined on field K
In case of $\mathcal{A}: V \to W$ linear transformation, ha $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ and $a \in K$

- $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$ (linearity)
- $\mathcal{A}(a \cdot \boldsymbol{x}) = a \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ (homogeneity)

Examples for linear transformations

- identity transformation
- differentiation
- counter-example: $\mathcal{B}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(x) = x^2$

1.2.1. Matrix of a linear transformation

Given a linear transformation $\mathcal{A}: V \to W$. We say that A is a matrix of $\mathcal{A}$ (for a fixed coordinates system for vector spaces V and W) if $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = A \cdot \boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{v} \in V$

Let $[v] = [\boldsymbol{v}_1, .., \boldsymbol{v}_n]$ denote a fixed basis of vector space V, and $[w] = [\boldsymbol{w}_1, .., \boldsymbol{w}_m]$ denote a fixed basis of vector space W, such that $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$. Then the columns of matrix A are the coordinate matrices of $\boldsymbol{w}_i$ (column vectors).

1.3. Image and kernel of a linear transformation

$\mathcal{A}: V \to W$ is a linear mapping

- its image is: $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{\boldsymbol{w} \in W \mid \exists \boldsymbol{v} \in V \ \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$
- its kernel is: $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$

Example 1. Calculation of the kernel and image of a linear mapping

Let $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a linear mapping, which, in the canonical basis, is given by matrix A. Determine the image and the kernel space of $\mathcal{A}$. First of all, we solve the linear equation system $A\boldsymbol{x} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A\boldsymbol{x} = 0 \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{Gauss elimination is necessary for determining both the image and kernel space of a matrix}} \tag{1}$$

We obtained that $x_1 = -x_3$ and $x_2 = x_3$, therefore, any $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ will satisfy the linear equation system $A\boldsymbol{x} = 0$, for all $x_3 \in \mathbb{R}$.
- the image space is spanned by the linearly independent columns of matrix A
- the kernel space is spanned by the linearly independent nontrivial solutions of equation system $A\boldsymbol{x} = 0$.

$$\begin{gathered} A\boldsymbol{x}_i = 0, \ \forall i = \overline{1, r}, \text{ where } r = \dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A})) \\ v = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{x}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_i = 0 \ \ \forall i = \overline{1, r} \end{gathered} \tag{2}$$

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathrm{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} \tag{3}$$

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \mathrm{span}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} \tag{4}$$

Theorem 1. Dimension theorem

For an arbitrary linear mapping $\mathcal{A} : V \to W$: $\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A})) + \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A})) = \dim(V)$

Example 2. (General solution of a linear transformation) Determine the *general* solution of a system of linear equations $A\boldsymbol{x} = b$.

First of all, we compute the general solution of the Homogeneous equation $A\boldsymbol{x} = 0$:

$$\boldsymbol{x}_h \in \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n,\ i = \overline{1,k} \right\} = \mathrm{span}\langle \boldsymbol{v}_1, .., \boldsymbol{v}_k \rangle = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \tag{5}$$

Then we need to find a special solution $\boldsymbol{x}_{0,ih}$ for the inhomogeneous equation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Finally, the the sum of the two will give the general solution of the inhomogeneous equation:

$$\boldsymbol{x}_{ih} \in \left\{ \boldsymbol{x}_{0,ih} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n,\ i = \overline{1,k} \right\} =: \texttt{\textbackslash vec x\_\{0,ih\} + \textbackslash Ker(\textbackslash mathcal A)} \tag{6}$$

Matlab 1. null, orth, rank

The kernel (or null) space of a linear transformation given by its matrix A can be computed in Matlab as follows:

```
>> A = [ 1 2 -1 ; 2 3 -1 ; -1 1 -2 ];
>> null(A)
ans =
   -0.5774
    0.5774
    0.5774
```

The image space can also be computed by function `orth`, but note, that Matlab gives an orthonormal basis for the image space, therefore, in general, it gives other vectors compared to those computed by hand.

```
>> orth(A)
ans =
   -0.5345   -0.0000
   -0.8018    0.3162
   -0.2673   -0.9487
```

You can check that the two vectors are indeed orthogonal.
Due to the fact that $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is a linear mapping into the *same* space, $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3$. In Matlab we can check this as follows:

```
>> rank([null(A) orth(A)])
ans = 3
```

1.4. Determinant and rank of a matrix

Theorem 2. (Minor expansion theorem) The determinant of a matrix A can be computed as the sum of an elements of a row or column multiplied by the corresponding signed minor determinant. Expansion of $\det(A)$ along the ith row: $\det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$
where a_{ij} denotes an element of A in the ith row and jth column, and D_{ij} is the corresponding minor determinant, the sign of the minors varies as the black and white colors on the chess table: $(-1)^{i+j}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & e & f \\ \square & h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & e & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Source: Wikipedia.org, see also Wolfram.com

$$= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Sarrus rule: a fast method the compute a 3×3 determinant

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

The **column rank** of a matrix gives the number of linearly independent columns of the matrix. The **row rank** of a matrix gives the number of linearly independent rows of the matrix.

- For any matrix, the two types of ranks are always the same and it gives the dimension of the larges nonzero minor determinant of the same matrix. We denote it as: $\text{rank}(A)$.
- Matrix A is called full-rank if its rank is $\text{rank}(A) = \min(\text{nr. of rows}, \text{nr. of columns})$.
- A square matrix A is called full-rank if its determinant is nonzero.

1.5. Matrix inversion

Matrix $A \in T^{n\times n}$ is **invertible** $\quad\Leftrightarrow\quad \det(A) \neq 0$

Matrix inversion by using the adjugate matrix $\text{adj}(A)$: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$.

In $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ case:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{7}$$

In $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ case:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T \tag{8}$$

Example 3. (Determine the inverse of the following matrix)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 4 \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

1.6. Eigen values and eigen vectors (eigen value/spectral decomposition)

$\mathcal{A} : V \to V$ (V egy K test feletti vektortér) lineáris leképezés
sajátvektora az $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, ha $\exists \lambda \in K \quad \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$
Ekkor az $\boldsymbol{x}$ vektort az $\mathcal{A}$ leképezés λ sajátértékhez tartozó sajátvektorának nevezzük.

A sajátértékek a leképezés mátrixából számolhatók. Nem számít, hogy milyen bázisokra vonatkozóan van felírva a mátrix, a sajátértékek mindig ugyanazok lesznek, mivel a sajátérték a leképezés tulajdonsága. A sajátvektorok is ugyanazok lesznek, azonban a kiindulási tér bázisában koordinátázva kapjuk ezeket.

$A x = \lambda \boldsymbol{x} \quad\to\quad \lambda\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad\to\quad (\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer, melynek az $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ vektor a megoldása, tehát létezik nem triviális megoldás, mely azzal ekvivalens, hogy az együtthatómátrix oszlopai lineárisan összefüggőek, vagyis a determinánsa nulla.

Figyelem! A karakterisztikus polinom a Lineáris algebra tárgyból tanult alaktól eltérő, azonban azzal abszolútértékben megegyező, ezért azonos λ értékek esetén nulla. A most használt alaknál az A mátrixhoz képest a determinánsban nem csak a főátlóbeli elemek változnak, hanem a főátlóbeli elemek is, a (-1)-szeresükre.

- **Characteristic polynomial**: $\det(\lambda I - A)$
- A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei: $\det(\lambda I - A) = 0$
- A sajátvektorok a $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ lineáris egyenletrendszer megoldásai a megfelelő λ értékekre külön-külön számolva

Example 4.

Determine the eigen values and eigen vector of the following matrix!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \det\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 3) \tag{9}$$

Eigen values: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$

Eigen vector(s) for $\lambda_1 = 1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad -2x + 4y = 0 \quad \rightarrow \quad y = x/2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cdot p \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Eigen vector(s) for $\lambda_2 = -3$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad 4x = -2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot q \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Theorem 3. Cayley-Hamilton

Every matrix satisfies its own characteristic equation In the special case, when $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\text{Characteristic (polynomial) equation: } \lambda^2 + \lambda\,\mathrm{tr}(A) + \det(A) = 0 \tag{10}$$

$$\text{According to this theorem we have: } A^2 + A\,\mathrm{tr}(A) + I\det(A) = 0 \tag{11}$$

Example 5. Cayley-Hamilton

It is given matrix A. Determine its characteristic polynomial, then, check the Cayley-Hamilton property.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2 \tag{12}$$

$$A^2 - 5 \cdot A - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

1.7. Basis transformation, diagonalization

Egy vektortérben az éppen tekintett bázis határozza meg a vektorok koordinátamátrixát, ettől azonban néha el kell térni. Ez egy lineáris leképezés alkalmazásával valósítható meg, melynek mátrixát úgy kapjuk, hogy a mátrix oszlopaiba írjuk az új bázisvektorokat a régi bázis szerinti koordinátázva, majd a kapott mátrixon invertáljuk. A mátrix, és ezáltal a leképezés mindig invertálható, mivel bázist bázisba visz, melyeknek vektorai lineárisan függetlenek. Jelölje egy $\boldsymbol{x} \in V$ vector $[e]$ bázis szerinti koordináta mátrixát $x_{[e]}$, egy új $[v]$ bázis szerinti koordinátamátrixát pedig $x_{[v]}$. Legyen S mátrix, melynek oszlopaiban az új bázisvektorok találhatók $S = \left[\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\right]$. Pontosabban fogalmazva, az S mátrix oszlopai az új bázisvektorok $[e]$ bázisban felírt koordináta mátrixai legyenek: $S = \left[v_{1\,[e]}, ..., v_{n\,[e]}\right]$. Ekkor

$S^{-1} \cdot x_{[e]} = x_{[v]} \qquad S \cdot x_{[v]} = x_{[e]}$

Tehát az S mátrix által leírt leképezés valójában az új bázisra vonatkozó koordinátázást a régire transzformálja, és az S^{-1} mátrix transzformál az új bázisba.

Example 6. (Basis transformations) This will be important at state-space transformations

We consider two vector spaces $V = W$ (for simplicity let be both $\mathbb{R}^2$), and let be the following vectors in $\mathbb{R}^2$ (their coordinates matrices being given in the canonical basis $[e] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] = [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]$ of $\mathbb{R}^2$):

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{[e]}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{[e]}, \ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{[e]}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{[e]}, \ \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{[e]}, \ \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{[e]} \tag{14}$$

$[e] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ is the canonical basis of $V = W = \mathbb{R}^2$, Furthermore, we consider $[v] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ and $[w] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ be an alternative basis of vector spaces V and W, which are not canonical. Now we consider a linear mapping $\mathcal{A} : V \to W$, If we use on both sides (V and W) the canonical basis, this mapping can be given by matrix A: $(V_{[e]} \xrightarrow{A} W_{[e]})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

In the starting vector space (V, from which $\mathcal{A}$ maps), we want to switch from the canonical basis $[e]$ to basis $[v]$, similarly, in the image space (W, into which $\mathcal{A}$ maps), we want to switch to basis $[w]$. We wonder, what would be the matrix of the linear mapping $\mathcal{A}$, which maps from $V_{[v]}$ into $V_{[w]}$. First, let us define the following matrices:

$$S := \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1[e]} & v_{2[e]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$T := \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_{1[e]} & w_{2[e]} \end{pmatrix}}_{\text{this is the correct prescription}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

then we have that

$$\boldsymbol{v}_i = S\boldsymbol{e}_i \quad \text{and} \quad \boldsymbol{e}_i = S^{-1}\boldsymbol{v}_i. \tag{18}$$

The same is true for $[w]$, as well.

Let be $\boldsymbol{x}$ be a point in vector space V. The coordinate matrix of $\boldsymbol{x}$ in the canonical basis $[e]$ is $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, in other words:

$$\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{[e]} \tag{19}$$

Now, we want to compute the coordinate matrix of $\boldsymbol{x}$ in basis $[v]$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{-1}\boldsymbol{v}_1 & S^{-1}\boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= S^{-1} S \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = S S^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} S^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}_{[v]} \end{aligned} \tag{20}$$

What is important that we have a linear mapping: $\mathcal{A} : V \to W$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, furthermore

$$\boxed{\begin{matrix} x_{[e]} = S x_{[v]} \\ x_{[v]} = S^{-1} x_{[e]} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} y_{[e]} = T y_{[w]} \\ y_{[w]} = T^{-1} y_{[e]} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \cdot x_{[e]} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} \cdot x_{[v]} \\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \cdot y_{[e]} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 \end{pmatrix} \cdot y_{[w]} \end{matrix}} \tag{21}$$

The coordinates matrices $x_{[e]}$, $x_{[v]}$, $y_{[e]}$ and $y_{[w]}$ are intentionally NOT denoted as vectors, since they depend on the choice of the basis vectors (i.e. coordinates system). On the other hand, vectors $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$ are two well-defined elements of V and W (eg. $\boldsymbol{x}$ is the left upper corner of the blackboard), which are independent of the choice of the coordinates system.

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \begin{array}{l} \nearrow y_{[e]} = Ax_{[e]} \\ \searrow y_{[w]} = \hat{A}x_{[v]} \end{array} \qquad \begin{tikzcd} V_{[e]} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W_{[e]} \arrow[d, "T"] \\ V_{[v]} \arrow[r, Rightarrow, "\hat{A}"'] & W_{[w]} \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{A} = T^{-1}AS} \tag{22}$$

$$y_{[w]} = \hat{A}x_{[v]} = T^{-1}A\underbrace{Sx_{[v]}}_{x_{[e]}} = T^{-1}\underbrace{Ax_{[e]}}_{y_{[e]}} = T^{-1}y_{[e]} = y_{[w]} \tag{23}$$

Egy $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció mátrixa diagonális, ha a sajátvektorok bázisára vonatkozóan írjuk fel. A sajátvektorok azonban nem minden esetben alkotnak bázist, ezért nem minden leképezés írható le diagonális mátrixszal.

Egy lineáris leképezés mátrixa diagonalizálható akkor és csak akkor, ha minden sajátértékére annak algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik.

- egy λ sajátérték algebrai multiplicitása k, ha λ k-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak.
- egy λ sajátérték geometriai multiplicitása k, ha a λ-hoz tartozó sajátaltér (λ-hoz tartozó sajátvektorok által alkotott altér) k dimenziós.

Example 7. $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3, & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \lambda_{1,2} = 3, \; \lambda_3 = -6$

A 3 sajátérték algebrai multiplicitása tehát 2, a 6 sajátértéké 1.

$\lambda_{1,2} = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot p, \; \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot q \quad p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda_3 = -6$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot r \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

A 3 sajátérték geometriai multiplicitása tehát 2, a 6 sajátértéké 1, mindkét sajátértékre a multiplicitások páronként megegyeznek, ezért a mátrix diagonalizálható. Ha a sajátvektorokat oszlopaiban tartalmazó mátrix S, akkor a leképezés diagonális mátrixa

$$D = S^{-1} \cdot A \cdot S \quad \to \quad A = S \cdot D \cdot S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

1.8. Quadratic forms

A kvadratikus alakok $Q(\boldsymbol{x}) : V \to T$ alakú leképezések, ahol V egy T test feletti vektortér. Mi speciálisan $Q(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezésekkel foglalkozunk. Általános alakja:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

A kvadratikus alak felírható mátrixszorzat alakban is, ahol $a_{ij} = A_{ij}$ a mátrix megfelelő elemei. A mátrixszorzás definíciójából adódóan ez skalárszorzat alakban is írható.

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$$

A kvadratikus alakhoz tartozó mátrix nem egyértelmű. A főátlóbeli elemek egyértelműek, ezek az x_i^2 alakú tagok együtthatói, azon kívül azonban csak az $a_{ij} + a_{ji}$ összegek ismertek ($i \neq j$).

Példa:

$Q(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$ kvadratikus alak többféle mátrixszal leírható

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

A szimmetrikus mátrix egyértelműen tartozik a kvadratikus alakhoz, ezért ezt nevezzük a kvadratikus alak mátrixának (a példában A_2 mátrix).

Egy kvadratikus alak egy vektorhoz egy valós számot rendel. Ennek lehetséges előjele alapján osztályozzuk a kvadratikus alakokat, illetve ezzel ekvivalensen a szimmetrikus mátrixokat. (Később ezt sokszor fogjuk használni stabilitási vizsgálatok során.)
A $Q(x)$ kvadratikus alak, illetve az ezt leíró A szimmetrikus mátrix

- **pozitív definit**, ha $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \ > 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$
  Megjegyzés: minden kvadratikus alak a nullvektor esetén nulla értéket vesz fel, $\langle A \cdot \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0} \rangle = 0$
- **pozitív szemidefinit**, ha $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \ \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
  és $\exists \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, hogy $\langle A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$
- **negatív definit**, ha $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \ < 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$
- **negatív szemidefinit**, ha $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \ \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\exists \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, hogy $\langle A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$
- **indefinit**, ha pozitív és negatív értékeket egyaránt felvesz a kvadratikus alak.

A kvadratikus alakhoz tartozó A szimmetrikus mátrix λ_i sajátértékei valósak, melyekkel a fentiekkel ekvivalens feltételek fogalmazhatók meg. A $Q(\boldsymbol{x})$ kvadratikus alak

- pozitív definit $\quad \Leftrightarrow \quad \forall i \ \lambda_i > 0$
- pozitív szemidefinit $\quad \Leftrightarrow \quad \forall i \ \lambda_i \geq 0$ és $\exists j \ \lambda_j = 0$
- negatív definit $\quad \Leftrightarrow \quad \forall i \ \lambda_i < 0$
- negatív szemidefinit $\quad \Leftrightarrow \quad \forall i \ \lambda_i \leq 0$ és $\exists j \ \lambda_j = 0$
- indefinit $\quad \Leftrightarrow \quad \exists i \ \lambda_i > 0$ és $\exists j \ \lambda_j < 0$

A kvadratikus alakot leíró mátrix is diagonalizálható. Mivel egy szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak, ha diagonalizálható, akkor ortonormált sajátbázis szerint is diagonalizálható. Amennyiben valamelyik sajátérték geometriai multiplicitása nem 1, és a számolás során nem ortogonális sajátvektorokat kaptunk, akkor valamilyen ortogonalizációs eljárással (pl. Gram-Schmidt ortogonalizáció) elérhető, hogy a sajátalteret ortogonális vektorok generálják. Emellett a vektorokat minden esetben normálni kell.

Ekkor ha S az ortonormált bázis vektorait tartalmazó mátrix, akkor $S^{-1} = S^T$

$A = S \cdot D \cdot S^{-1}$

$\boldsymbol{x}^T \cdot A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^T \cdot (S^T)^T) \cdot D \cdot (S^{-1} \cdot \boldsymbol{x}) = (S^T \cdot \boldsymbol{x})^T \cdot D(\cdot S^{-1} \cdot \boldsymbol{x})$

$\boldsymbol{y} = S^{-1} \cdot \boldsymbol{x} = S^T \cdot \boldsymbol{x} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{x}^T \cdot A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T \cdot D \cdot \boldsymbol{y}$

1.9. Matrix calculus

Az exponenciális függvény ($\exp(x) = e^x$) az alábbi hatványsorral definiálható.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{(Taylor sorfejtés)}$$

Elképzelhető, hogy egy fix paramétere is van a függvénynek, például: $a \in \mathbb{R}$ konstans, és t az idő változó

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!}$$

Az exponenciális függvényt kiterjeszthetjük mátrixokra (mátrix exponenciális), ekkor $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{6} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Tulajdonságok:

- $e^{\mathbf{0}} = I$, ahol $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nullmátrix
- Ha $AB = BA$ akkor $e^A e^B = e^{A+B}$. Általában nem igaz a képlet, mivel a mátrix szorzás nem kommutatív.
- $e^A e^{-A} = I$
- $e^{At} e^{As} = e^{A(t+s)}$, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
e^{At}e^{As} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k s^k}{k!} \\
&= (I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{6} + ...)(I + As + \frac{A^2s^2}{2} + \frac{A^3s^3}{6} + ...) = \\
&= I + A(t+s) + \frac{1}{2}A^2(t^2 + 2ts + s^2) + \frac{1}{6}A^3(t^3 + 3ts^2 + 3t^2s + s^3) + ... \\
&= I + A(t+s) + \frac{1}{2}A^2(t+s)^2 + \frac{1}{6}A^3(t+s)^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t+s)^k}{k!}
\end{aligned}$$

- $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{At}) &= A + A^2t + \frac{1}{2}A^3t^2 + ... + \frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} \\
&= A(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + ...) = (I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + ...)A
\end{aligned}$$

Example 8. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + ... = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e^B = I + B + \frac{B^2}{2!} + ... = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e^B e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$e^{A+B} = I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2!} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3!} + ... = I \cdot (1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ...) + I' \cdot (1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + ...) =$
$= \begin{pmatrix} ch(1) & sh(1) \\ sh(1) & ch(1) \end{pmatrix}$

Proposition 4. tetszőleges diagonalizálható mátrix exponenciális függvénye

$$A = SDS^{-1} \Rightarrow e^A = Se^D S^{-1} = S \exp \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1} = S \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, .., e^{\lambda_n}) S^{-1} \tag{24}$$

Proof (inkább csak levezetés).

$$A^k = SD^k S^{-1} \quad , \quad D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, .., \lambda_n^k) \tag{25}$$

Teljes indukció:

$$A^k = A^{k-1} A = \left(SD^{k-1} S^{-1}\right)\left(SDS^{-1}\right) = SD^k S^{-1} \tag{26}$$

Ekkor a következőket csinálhatjuk:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = S \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} S^{-1} = S \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k, .., \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n^k\right) S^{-1} = S \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, .., e^{\lambda_n}\right) S^{-1} \tag{27}$$

Tehát, valóban $e^A = Se^D S^{-1}$. □

Matlab 2. Mátrixexponenciális kiszámítása – diagonalizáció ($A = SDS^{-1}$) eig,expm,diag

```
>> A = rand(3,3)
A =
    0.8147    0.9134    0.2785
    0.9058    0.6324    0.5469
    0.1270    0.0975    0.9575
>> [S,D] = eig(A)
S =
    0.6752   -0.7134   -0.5420
   -0.7375   -0.6727   -0.2587
   -0.0120   -0.1964    0.7996
```

```
D =
   -0.1879         0         0
         0    1.7527         0
         0         0    0.8399

>> expm(A)
ans =
    3.2881    2.2290    1.3802
    2.2617    2.8712    1.7128
    0.4615    0.3910    2.7554
```

```
>> S * expm(D) / S
ans =
    3.2881    2.2290    1.3802
    2.2617    2.8712    1.7128
    0.4615    0.3910    2.7554

>> S * diag(exp(diag(D))) / S
ans =
    (... ugyanaz )
```

1.10. Állandó Együtthatós Lineáris Differenciálegyenletek

A továbbiakban a vektorértékű változók, függvények (pl. $\boldsymbol{x}$) nem lesznek kiemelve.

A tárgy keretében főleg elsőrendű lineáris differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

1. Ha $A \in \mathbb{R}$ (skaláris eset), akkor a változók szétválasztásának módszerével meghatározható a megoldás.
   Megoldás: $x(t) = e^{At} x_0$, ahol $x_0 \in \mathbb{R}$ skalár

2. Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor szükséges az e^{At} mátrix kiszámítása.
   Megoldás: $x(t) = e^{At}x_0 \quad e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$
   Közelítés: $I + At + \frac{A^2t^2}{2} + ...$

Példa: Adott az alábbi csatolatlan differenciálegyenlet rendszer

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \end{aligned}$$

Amely átírható a következő alakra

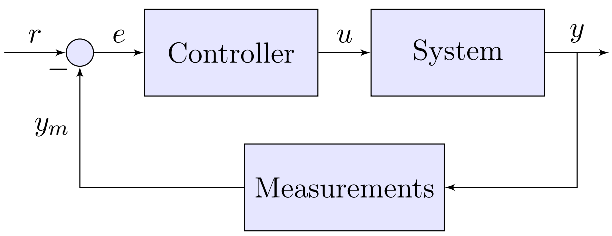
$$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mivel csak a diagonális elemek nem nullák, a rendszer csatolatlan, ezért a változók szétválasztásának módszerével a differenciálegyenlet megoldható.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{-t} \\ x_2(t) &= c_2 e^{2t} \end{aligned}$$

ahol $c_1 = x_{1_0}$ és $c_2 = x_{2_0}$

2. Általános Példák Szabályzott Rendszerekre



Rendszer: Olyan fizikai vagy logikai eszköz, amely jeleken végez valamilyen műveletet. (Bemenő jeleket dolgoz fel, és kimenő jeleket állít elő.)
Példa rendszerekre, és szabályozásra

- Autó sebessége: beavatkozás: gázpedál, érzékelés: sebességmérő, szabályozás: humán vagy tempomat
- Hűtőszekrény hőmérséklet: beavatkozás: hűtőközeg mozgatása - kompresszor, érzékelés: hőmérő, szabályozás: szabályozó automatika beállított hőmérséklet elérése érdekében
- További példák találhatóak az FSB könyv első fejezetében, lásd a tárgy honlapján!