① Disszipatív rendszerek

Feltképes fogalmak

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u & x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \\ y = h(x) & y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Legyen $V(x)$ a rendszer összenergiáját jellképező fv. $(V(x) \geq 0)$

Legyen $s(u,y)$ a rendszernek adott üzemanyag ráta.

Ekkor a rendszer disszipatív ha

$$\boxed{\underbrace{V(x(t_1))}_{\text{végenergia}} \leq \underbrace{V(x(t_0))}_{\text{kezdeti energia}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t))\, dt}_{\text{üzemanyag ellátásból adódó energia}} \quad \forall\, t_0 \leq t_1}$$

Úgy is felírhatom, mint:

$$\underbrace{V(x(t_1)) - V(x(t_0))}_{\int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(x(t))\, dt} \leq \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t))\, dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(x(t))\, dt \leq \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t))\, dt \quad \forall\, t_0 \leq t_1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{V}(x(t)) \leq s(u(t), y(t)) \quad \forall\, t \geq 0}$$

Az energiafüggvényt megadni NEHÉZ. Minden rendszerhez más: LMI-vel lehet találni általános fv-t.

energia „szerű"

Tipikus „supply" függvények:

$s(u,y) = u^T y$

$s(u,v) = \|y\|^2 - \|u\|^2$

$s(u,v) = 0$ (stabilitásvizsgálat)

....

I $s(u,v) = 0$ (akkor input/output sem kell)

tehát $\mathcal{G}: \underbrace{\dot{x} = f(x)}$ a rendszer

adott $V(x) \geq 0$ energia szerű fv.

és $V(x(t_1)) \leq V(x(t_0))$ (a rendszer energiát veszít)

vagyis $V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \leq 0 \quad \forall\, t_0 \leq t_1$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{V}(x(t)) \leq 0}$$ → csökken az energia ezért stabil a rendszer

$\dot{V}(x(t)) = \langle \text{grad}\, V(x), f(x) \rangle$ ahol $x = x(t)$

↑ a $V(x)$ fv $\dot{x} = f(x)$ által meghatározott $x(t)$ trajektória mentén vett derivált.

II

II $\quad s(u,v) = \gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2 = \gamma^2 u^T u - y^T y$

$$\mathcal{G}: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u & x\in\mathbb{R}^n \quad u\in\mathbb{R}^m \\ y = h(x) & y\in\mathbb{R}^p \end{cases}$$

$$V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \le \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|u\|^2 dt - \int_{t_0}^{t_1} \|y\|^2 dt$$

$V(x) \geqslant 0$ és $\exists\, x_0$ s.t. $V(x_0) = 0$

→ Legyen $x(t_0) = x_0$ vagyis indítsuk a rendszert a nulla energiájú állapotból

→ Legyen $t_1 = \infty$

$u(t)\in\mathbb{R}^m$

$\|u(t)\|^2$ (vektornorma)

Ekkor:

$$0 \le \underbrace{V(x(\infty))}_{\le 0} - \underbrace{V(\underbrace{x(t_0)}_{x_0})}_{=0} \le \gamma^2 \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} \|u\|^2 dt}_{u\in\mathcal{L}_2^m} - \int_{t} \|y\|^2 dt$$

$u\in\mathcal{L}_2^m = \left\{u: [t_0,\infty)\to\mathbb{R}^m \;\middle|\; \int_{t_0}^{\infty}\|u(t)\|^2 dt < \infty\right\}$

jelnorma

Tehát $\quad 0 \le \gamma^2\|u\|_{\mathcal{L}_2^m} - \|y\|_{\mathcal{L}_2^p}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\|y\|_{\mathcal{L}_2^p}}{\|u\|_{\mathcal{L}_2^m}} \le \gamma^2$$

$u \longrightarrow \boxed{\mathcal{G}} \longrightarrow y = \text{„}\mathcal{G}u\text{"}$

operátor

$$\Downarrow$$

$$\frac{\|\mathcal{G}u\|_{\mathcal{L}_2^p}}{\|u\|_{\mathcal{L}_2^m}} \le \gamma^2 \quad \forall u\in\mathcal{L}_2^m \implies \boxed{\underbrace{\sup_{u\in\mathcal{L}_2^m} \frac{\|\mathcal{G}u\|_{\mathcal{L}_2^p}}{\|u\|_{\mathcal{L}_2^m}}}_{\text{Indukált } \mathcal{L}_2 \text{ operátor norma}} \le \gamma^2}$$

Tehát $\quad \|\mathcal{G}\|_{\mathcal{L}_2} \le \gamma^2$

II.1. Indukált $\mathcal{L}_2$ operátor norma becslése LTI rendszerek esetén

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad u \in \mathbb{R}^m$$

$$y = Cx + Du \qquad y \in \mathbb{R}^p$$

Az energia fv. legyen $V(x) = x^T P x$ ahol $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$s(u,y) = \gamma^2 u^T u - y^T y$$

$$= \gamma^2 u^T u - (Cx + Du)^T (Cx + Du)$$

$$= \gamma^2 u^T u - x^T C^T C x - x^T C^T D u - u^T D^T C x - u^T D^T D u$$

$$= \begin{pmatrix} x^T & u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C^T C & -C^T D \\ -D^T C & \gamma^2 I_m - D^T D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

$$V(x) = x^T P x$$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$= (Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu)$$

$$= x^T A^T P x + u^T B^T P x + x^T P A x + x^T P B u$$

$$= \begin{pmatrix} x^T & u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

Disszipativitási egyenlőtlenség: $V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \le \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t))\, dt \quad \forall\, t_0 \le t_1$

$$\Updownarrow$$

$$\dot{V}(x) \le s(u,y) \qquad \forall\, t\text{-re} \quad \forall\, x_0\text{-ra}$$

Tehát

$$\begin{pmatrix} x^T & u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} x^T & u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C^T C & -C^T D \\ -D^T C & \gamma^2 I_m - D^T D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad \forall\, x, u$$

Végül

$$\boxed{\begin{pmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & -\gamma^2 I_m + D^T D \end{pmatrix} < 0}$$

LMI γ^2 becslésére!

Ezeket keressük s.t. γ^2 legyen min!

II.2 Mi értelme az indukált $\mathcal{L}_2$ op-norma becsléseknek?

Pl. utasszállító repülőgép

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u + g_2(x)d$$

$$y = h_1(x) + j(x)d \overset{\text{vagy}}{=} h_1(x,d)$$

$$y_P = h_2(x)$$

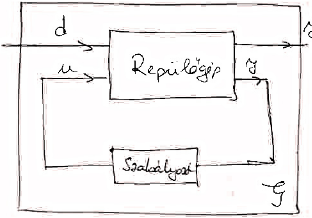
x: állapotvektor

u: légterelők általi szabályozó bemenet

d: légörvények, levegőmozgás általi zavarás (disturbance)

y: szélerősségmérő szenzorok

y_P: performancia kimenet: mennyire zötyög a gép



$\equiv$

CÉL: $\|\mathcal{G}\|_{\mathcal{L}_2} = \sup_{d\in\mathcal{L}_2^m} \dfrac{\|y_P\|_{\mathcal{L}_2^q}}{\|d\|_{\mathcal{L}_2^m}} \le \gamma^2$

Legyen minimális

> Vagyis a gép zötyögése a lég-disturbancia mértékéhez képest legyen minimális

II.3 $\mathcal{L}_2$ erősítés becslése $\underbrace{\text{Lineáris ParaméterVáltozós}}_{\text{LPV}}$ rendsz.

$$\mathcal{G}_\rho \begin{cases} \dot{x} = A(\rho)x + B(\rho)u \\ y = C(\rho)x \end{cases}$$

Egyszerűség kedvéért $D(\rho)=0$

ahol $\rho = \rho(t) \in R^r$

Amit II.1-ben levezettem meg lehet csinálni $\mathcal{G}_\rho$-ra is:

LPV

Keresek egy energia fv-t $V(x) = x^T P x$ alakban

u.h. $\qquad = -C^T(\varsigma)(-I)^{-1}C(\varsigma)$

$$\begin{pmatrix} A^T(\varsigma)P + PA(\varsigma) + C^T(\varsigma)C(\varsigma) & PB(\varsigma) \\ B^T(\varsigma)P & -\gamma^2 I_m \end{pmatrix} < 0 \quad \forall \varsigma \in \mathbb{R}^r$$

és γ^2 minimális. Az a baj ezzel, hogy esély sincs arra, hogy ς-ban affin legyen!

Schur komplemens lemma segítségével:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A^T(\varsigma)P + PA(\varsigma) & PB(\varsigma) & C^T(\varsigma) \\ B^T(\varsigma)P & -\gamma^2 I_m & 0 \\ C(\varsigma) & 0 & -I_p \end{pmatrix}}_{\Lambda(\varsigma)} < 0 \quad \forall \varsigma \in \mathbb{R}^r$$

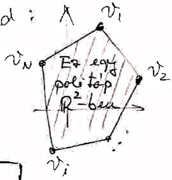
Ha $A(\varsigma), B(\varsigma), C(\varsigma)$ mátrixok affin mátrixok, akkor $\Lambda(\varsigma)$ mátrix is affin. (affin: $A(\varsigma) = A_0 + A_1\varsigma_1 + \ldots + A_r\varsigma_r$)

Továbbá ha $\varsigma \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^r$ egy politóp $\mathbb{R}^r$-ben akkor

$\boxed{\Lambda(\varsigma) < 0 \quad \forall \varsigma \in \mathcal{R}}$

Egy konvex, könnyen oldható felat

pld:



(T) Legyenek $v_1, \ldots, v_N \in \mathcal{R}$ az $\mathcal{R}$ politóp sarokpontjai, akkor

$$\Lambda(v_i) < 0 \quad \forall i = \overline{1,N} \iff \Lambda(\varsigma) < 0 \quad \forall \varsigma \in \mathcal{R}$$

Ezek már klasszikus paramétertől nem függő LMI-k, amik megoldhatóak számítógéppel