① Disszipatív rendszerek

Feltképes fogalmak

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u & x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \\ y = h(x) & y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Legyen $V(x)$ a rendszer összenergiáját jellemező fv. $(V(x) \geq 0)$

Legyen $s(u,y)$ a rendszernek adott üzemanyag rata:

Ekkor a rendszer disszipatív ha

$$\boxed{\underbrace{V(x(t_1))}_{\text{végenergia}} \leq \underbrace{V(x(t_0))}_{\text{kezdeti energia}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t))\, dt}_{\text{üzemanyag ellátásból adódó energia}} \quad \forall\, t_0 \leq t_1}$$

Úgy is felírhatom, mint:

$$\underbrace{V(x(t_1)) - V(x(t_0))}_{\int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(x(t))\, dt} \leq \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t))\, dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(x(t))\, dt \leq \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t))\, dt \qquad \forall\, t_0 \leq t_1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{V}(x(t)) \leq s(u(t), y(t)) \qquad \forall\, t \geq 0}$$

Az energia függvényt megadni NEHÉZ. Minden rendszerhez más: LMI-vel lehet találni általános fv-t.

energia „szerű"

Tipikus „supply" függvények:

$s(u,y) = u^T y$

$s(u,y) = \|y\|^2 - \|u\|^2$

$s(u,y) = 0$ (stabilitásvizsgálat)

CCS 2018b
TG Disszipatív

I $S(u,v) = 0$ (ekkor input/output sem kell)

tehát $\mathcal{G}: \underline{\dot{x} = f(x)}$ a rendszer

adott $V(x) \geq 0$ energia szerű fv.

és $V(x(t_1)) \leq V(x(t_0))$ (a rendszer energiát veszít)

vagyis $V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \leq 0 \quad \forall\, t_0 \leq t_1$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{V}(x(t)) \leq 0}$$ → csökken az energia ezért stabil a rendszer

$$\dot{V}(x(t)) = \langle \operatorname{grad} V(x), f(x) \rangle \quad \text{ahol } x = x(t)$$

a $V(x)$ fv $\dot{x} = f(x)$ által meghatározott $x(t)$ trajektória mentén vett deriváltja.

II

II $\quad s(u,v) = \gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2 = \gamma^2 u^T u - y^T y$

$$\mathcal{G}: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u & x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \\ y = h(x) & y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

$$V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \leq \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|u\|^2 dt - \int_{t_0}^{t_1} \|y\|^2 dt$$

$V(x) \geq 0$ és $\exists\, x_0$ u.h. $V(x_0) = 0$

→ Legyen $x(t_0) = x_0$ vagyis indítsuk a rendszert a nulla energiájú állapotból

→ Legyen $t_1 = \infty$

Ekkor:

$u(t) \in \mathbb{R}^m$

$\|u(t)\|^2$ (vektornorma)

$$0 \leq \underbrace{V(x(\infty))}_{\leq 0} - \underbrace{V(\underbrace{x(t_0)}_{x_0})}_{=0} \leq \gamma^2 \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} \|u\|^2 dt}_{} - \int_{t} \|y\|^2 dt$$

$u \in \mathcal{L}_2^m = \left\{ u : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^m \;\middle|\; \int_{t_0}^{\infty} \|u(t)\|^2 dt < \infty \right\}$

jelnorma

Tehát $\quad 0 \leq \gamma^2 \|u\|_{\mathcal{L}_2^m} - \|y\|_{\mathcal{L}_2^p}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\|y\|_{\mathcal{L}_2^p}}{\|u\|_{\mathcal{L}_2^m}} \leq \gamma^2$$

$u \to \boxed{\mathcal{G}} \to y = „\mathcal{G}u"$

operátor

$$\Downarrow$$

$$\frac{\|\mathcal{G}u\|_{\mathcal{L}_2^p}}{\|u\|_{\mathcal{L}_2^m}} \leq \gamma^2 \quad \forall u \in \mathcal{L}_2^m \implies \boxed{\underbrace{\sup_{u \in \mathcal{L}_2^m} \frac{\|\mathcal{G}u\|_{\mathcal{L}_2^p}}{\|u\|_{\mathcal{L}_2^m}}}_{} \leq \gamma^2}$$

Tehát $\|\mathcal{G}\|_{\mathcal{L}_2} \leq \gamma^2$ $\quad$ Indukált $\mathcal{L}_2$ operátor norma

CCS 2018b TG

II.1. Indukált $\mathcal{L}_2$ operátor normabecslése LTI rendszerek esetén

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad u \in \mathbb{R}^m$$

$$y = Cx + Du \qquad y \in \mathbb{R}^p$$

Az energia fv. legyen $V(x) = x^T P x$ ahol $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned}
s(u,y) &= \gamma^2 u^T u - y^T y \\
&= \gamma^2 u^T u - (Cx + Du)^T (Cx + Du) \\
&= \gamma^2 u^T u - x^T C^T C x - x^T C^T D u - u^T D^T C x - u^T D^T D u \\
&= \begin{pmatrix} x^T & u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C^T C & -C^T D \\ -D^T C & \gamma^2 I_m - D^T D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$V(x) = x^T P x$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\
&= (Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu) \\
&= x^T A^T P x + u^T B^T P x + x^T P A x + x^T P B u \\
&= \begin{pmatrix} x^T & u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Disszipativitási egyenlőtlenség: $V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t))\, dt \quad \forall t_0 \leq t_1$

$$\Updownarrow$$

$$\dot{V}(x) \leq s(u,y) \qquad \forall t\text{-re}, \ \forall x_0\text{-ra}$$

Tehát

$$\begin{pmatrix} x^T & u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x^T & u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C^T C & -C^T D \\ -D^T C & \gamma^2 I_m - D^T D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad \forall x, u$$

Végül

$$\boxed{\begin{pmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & -\gamma^2 I_m + D^T D \end{pmatrix} < 0}$$

LMI γ^2 becslésére!

Ezeket keressük s.t. γ^2 legyen min!

II.2 Mi értelme az indukált $\mathcal{L}_2$ op-norma becsléseknek?

Pl. utasszállító repülőgép

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u + g_2(x)d$$

$$y = h_1(x) + j(x)d \overset{\text{vagy}}{=} h_1(x,d)$$

$$y_p = h_2(x)$$

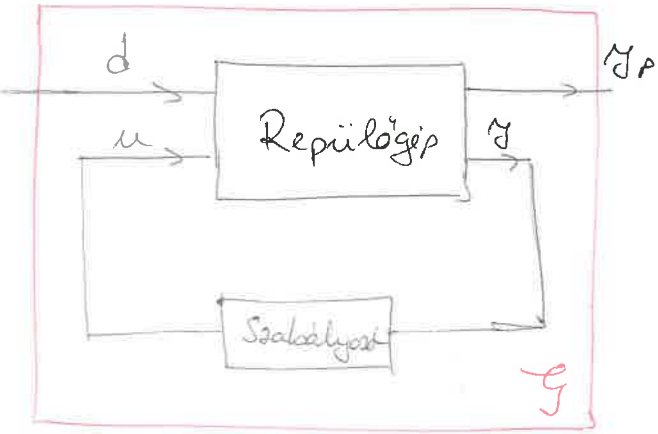
x: állapotvektor

u: légterelők általi szabályozó bemenet

d: légörvények, levegőmozgás általi zavarás (disturbance)

y: szélerősségmérő szenzorok

y_p: performancia kimenet: mennyire zötyög a gép



$\equiv$

CÉL: $\|\mathcal{G}\|_{\mathcal{L}_2} = \sup_{d \in \mathcal{L}_2^m} \frac{\|y_p\|_{\mathcal{L}_2^?}}{\|d\|_{\mathcal{L}_2^m}} \le \gamma^2$

Legyen minimális

Vagyis a gép zötyögése a lég-diszturbancia mértékéhez képest legyen minimális

II.3 $\mathcal{L}_2$ erősítés becslése $\underbrace{\text{Lineáris ParaméterVáltozós}}_{\text{LPV}}$ rendsz.

$$\mathcal{G}_\rho \begin{cases} \dot{x} = A(\rho)x + B(\rho)u \\ y = C(\rho)x \end{cases}$$

Egyszerűség kedvéért $D(\rho) = 0$

ahol $\rho = \rho(t) \in \mathbb{R}^r$

Amit II.1-ben levezettem meg lehet csinálni $\mathcal{G}_\rho$-ra is:

LPV

Keresek egy energia fv-t $V(x) = x^T P x$ alakban

u.h.

$= -C^T(s)(-I)^{-1}C(s)$

$$\begin{pmatrix} A^T(s)P + PA(s) + C^T(s)C(s) & PB(s) \\ B^T(s)P & -\gamma^2 I_m \end{pmatrix} < 0 \quad \forall s \in R^r$$

Az a baj ezzel, hogy esély sincs arra, hogy s-ban affin legyen!

és γ^2 minimális.

Schur komplemens lemma segítségével:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A^T(s)P + PA(s) & PB(s) & C^T(s) \\ B^T(s)P & -\gamma^2 I_m & 0 \\ C(s) & 0 & -I_p \end{pmatrix}}_{\Lambda(s)} < 0 \quad \forall s \in R^r$$

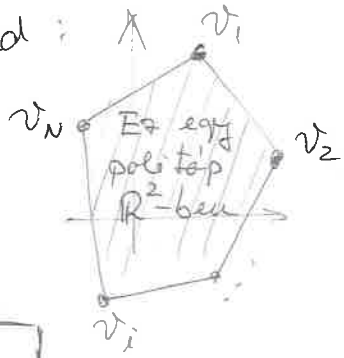
Ha $A(s), B(s), C(s)$ mátrixok affin mátrixok, akkor $\Lambda(s)$ mátrix is affin. (affin: $A(s) = A_0 + A_1 s_1 + \dots + A_r s_r$)

Továbbá ha $s \in \mathcal{R} \subset R^r$ egy politóp R^r-ben akkor

$$\boxed{\Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in \mathcal{R}}$$

Egy konvex, könnyen oldható felt.

pld:



T Legyenek $v_1, \dots, v_N \in \mathcal{R}$ az $\mathcal{R}$ politóp sarokpontjai, akkor

$$\Lambda(v_i) < 0 \quad \forall i = \overline{1,N} \iff \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in \mathcal{R}$$

Ezek már klasszikus paramétertől nem függő LMI-k, amik megoldhatóak számítógéppel