# Computer controlled systems

Lecture 11, November 29, 2017

version: 2018.12.07. – 21:32:34 [$\beta$ version]

## 1. Mintavételezett állapotegyenlet, diszkrét idejű állapottér modell

**Cél**: Az állapottér modell diszkretizálása, hiszen egy számítógép nem folytonos, hanem digitális jelekkel dolgozik. A számítógépvezérelt rendszerekben diszkrét idejű szabályozók vannak. A szabályozók tervezéséhez és implementálásához tehát szükségünk van a modell diszkretizálására.
**Megjegyzés:** Bonyolult rendszerek esetén általános eljárás, hogy először folytonos időben modellezünk, és tervezzük meg a szabályozót, majd utána diszkretizáljuk az egész rendszert egy megfelelő mintavételi idővel. A mintavételi időhöz a legfontosabb megkötés az, hogy nem ronthatja el a rendszer stabilitását. Persze emellett figyelembe kell venni a szabályozó alatt működő hardver képességeit.

### 1.1. Állapotegyenlet diszkretizálása

A folytonos idejű állapotegyenlet:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Helyettesítés: $t = t_{k+1}$ és $t_0 = t_k$

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Legyen $\phi = \tau - t_k$, $h = t_{k+1} - t_k$, így $t_{k+1} - \tau = h - \phi$

$$x(k+1) = e^{Ah}x(k) + \int_{0}^{h} e^{A(h-\phi)}Bu(k)d\phi$$

$$x(k+1) = e^{Ah}x(k) + A^{-1}(e^{Ah} - I)Bu(k)$$

### 1.2. Diszkrét idejű állapottér modell (DT-LTI)

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Ahol $\Phi = e^{Ah} = I + Ah + \cdots$ és $\Gamma = A^{-1}(e^{Ah} - I)B = (Ih + \frac{Ah^2}{2!} + \cdots)B$

#### 1.2.1. DT-LTI állapotegyenletek megoldása

$$x(1) = \Phi x(0) + \Gamma u(0)$$

$$x(2) = \Phi x(1) + \Gamma u(1) = \Phi^2 x(0) + \Phi\Gamma u(0) + \Gamma u(1)$$

$$x(3) = \Phi x(2) + \Gamma u(2) = \Phi^3 x(0) + \Phi^2\Gamma u(0) + \Phi\Gamma u(1)\Gamma u(2)$$

$$\vdots$$

$$x(k) = \Phi x(k-1) + \Gamma u(k-1) = \Phi^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1}\Gamma u(j)$$

## 1.3. Példák

1. **Példa**
   Adott a következő CT-LTI állapottér modell.
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Diszkretizáljuk $h = \log(2)$ mintavételi idővel!
   **MO:**
   $$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ 0 & s-2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-2} & \left(\frac{1}{s-2}\right)^2 \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{pmatrix} \rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$
   $$\Phi = e^{Ah} = \begin{pmatrix} e^{2\log 2} & \log 2\, e^{2\log 2} \\ 0 & e^{2\log 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4\log 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
   $$\Gamma = A^{-1}(e^{Ah} - I)B = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. **Példa**
   Adott egy DT-LTI rendszer a következő mátrixokkal:
   $$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Határozzuk meg a rendszer állapotvektorát az $x(2)$ időpontban $u(k) = 1 \qquad k = 0, 1, \cdots$ bemenet esetén!
   $x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$
   Kezdeti értékektől való függés:
   $$\Phi^2 x(0) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$
   A bemeneti jel hatása
   $$\sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1}\Gamma u(j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$
   Tehát
   $$x(2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$
   (b) Határozzuk meg azt a minimális hosszúságú bemeneti jelsorozatot, amely a rendszert az $x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$ állapotból az $x(n) = \begin{pmatrix} 13 & 10 \end{pmatrix}^\top$ állapotba viszi!
   **MO:**
   Ehhez szükségünk van az irányíthatósági mátrix kiszámolásánál használt képletre:
   $$x(n) = \Phi^n x(0) + W_c \mathcal{U}$$
   ahol $W_c$ a diszkrét idejű irányíthatósági teszt mátrix. Illetve az $\mathcal{U}$
   $$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix}$$

A képletet átrendezve és $n$ értékét behelyettesítve kapjuk, hogy

$$W_c^{-1}(x(2) - \Phi^2 x(0)) = \mathcal{U}$$

A számítást elvégezve kapjuk, hogy

$$u_0 = 1 \to x_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}^\top \; u_1 = 3 \to x_2 = \begin{pmatrix} 13 & 10 \end{pmatrix}^\top$$

(c) Határozzuk meg a rendszer kezdeti állapotát, ha a bemeneti jelsorozat $u(0) = u(1) = 0$, a kimeneten pedig $y(0) = y(1) = -1$ értékeket mértünk.
**MO:**

$$y(1) = x_1(1) = x_1(0) + 2x_2(0) \to x_2(0) = 0$$

3. **Példa**
Adott egy DT-LTI rendszer a következő mátrixokkal, valamint a bemeneti jelsorozat.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u(k) = 1, \quad k = 0, \dots, 9$$

Adja meg az állapotvektor értéket $x(10)$-ben!

$$x(10) = \Phi^{10} x(0) + \sum_{j=0}^{9} \Phi^{10-j-1} \Gamma u(j)$$

$$= \Phi^{10} x(0) + \Phi^9 \Gamma u(0) + \Phi^8 \Gamma u(1) + \ldots + \Phi \Gamma u(8) + \Gamma u(9)$$

Mivel $\Phi$ nilpotens mátrix, ezért a 2-nél magasabb hatványai nullmátrixok. Behelyettesítve az értékeket kapjuk, hogy

$$x(10) = \Gamma u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

4. **Példa**
Adott a következő differencia egyenlet:

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 12y(k) = -2u(k+1) + 5u(k) \tag{2}$$

Adja meg a fenti differencia egyenlet impulzusátviteli operátorát, $H(q)$-t!

$$(q^2 - 3q - 12)y(k) = (-2q + 5)u(k) \tag{3}$$

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) \tag{4}$$

$$H(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{-2q + 5}{q^2 - 3q + 12} \tag{5}$$

Adjon ÁTM-t a fenti impulzus átviteli operátorhoz!
Megoldás: Controller Form

$$\Phi = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$$

5. **Példa**
Adott a következő DT-LTI modell

$$\Phi = \begin{pmatrix} -0.25 & -0.3 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Adja meg a rendszer impulzusátviteli operátorát, $H(q)$-t!

$$\begin{aligned} H(q) &= C(qI - \Phi)^{-1}\Gamma + D \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.25 & -0.3 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(q+0.25)(q-0.4)} \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q - 0.4 & 0.3 \\ 0 & q + 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-3}{(q+0.25)} \end{aligned}$$

Adja meg a rendszer diszkért idejű impulzusátviteli függvényét, $h(t)$-t a $t = 0, 1, \ldots, 6$ időpontokban!

$$h(k) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k < 1 \\ C\Phi^{k-1}\Gamma & \text{ha} \quad k \leq 1 \end{cases}$$

Behelyetesítve:

$$\begin{aligned}
h(0) &= 0 \\
h(1) &= C\Phi^0\Gamma = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \\
h(2) &= C\Phi^1\Gamma = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.25 & -0.3 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.75 \\
h(3) &= 0.18 \\
h(4) &= 0.04 \\
h(5) &= -0.01 \\
h(6) &= 0.0029
\end{aligned}$$

## 2. Diszkrét idejű rendszerek stabilitása

**Tétel** Egy DT-LTI rendszer aszimptotikusan stabil pontosan akkor, ha $\lambda_i(\Phi)$ értékek a komplex egységkörön belül vannak.

**Példa:** Stabil-e az alábbi DT-LTI rendszer?

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**MO:** Nem stabil, hiszen az egyik sajátérték a komplex egységkörön kívül van.

## 3. Diszkrét idejű rendszerek irányíthatósága, elérhetősége és megfigyelhetősége

Az **elérhetőségből** mindig következik az irányíthatóság, de fordítva csak akkor igaz, ha $\exists\Phi^{-1}$. **Elérhetőség:** Ha $W_c = \begin{pmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \cdots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{pmatrix}$ mátrix teljes rangú.

**Megfigyelhetőség**: Ha $W_o = \begin{pmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{pmatrix}$ mátrix teljes rangú.

**Példa**
Adott a következő DT-LTI rendszer

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Irányítható-e, illetve elérhető-e ez a rendszer?
Írjuk fel az állapotegyenleteket!

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\
x_2(k+1) &= 0
\end{aligned}$$

Az irányíthatósághoz az kell, hogy tetszőleges kezdeti értékből a rendszert az origóba tudjuk vezérelni. Legyen a kezdeti érték például

$$x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ahol, $a, b \in \mathcal{R}$ tetszőleges. Válasszuk a bemeneti jelsorozatot a következőképpen:

$$u(k) = -(a+b), 0, \ldots$$

Ekkor az állapotegyenletek a következők lesznek:

$$x_1(1) = a + b - a - b$$
$$x_2(1) = 0$$

Ebből látszik, hogy a rendszer irányítható.
Az elérhetőséghez azt kell elérni, hogy a rendszert tetszőleges állapotba elvihessük az állapottérben. Viszont a fenti példán látszik, hogy az $x_2$ állapotváltozó értékét semmilyen bemenettel nem tudjuk megváltoztatni. Ez pedig abból következik, hogy a $\Phi$ mátrix szinguláris.

**Példa:** Adott a következő DT-LTI rendszer. Irányítható, elérhető illetve megfigyelhető-e?

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**MO:** Mivel $\Phi$ invertálható, ezért az irányíthatóság megfelel az elérhetőségnek.

$$W_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Mivel $W_c$ teljes rangú, ezért a rendszer irányítható és elérhető.

$$W_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mivel $W_o$ teljes rangú, ezért a rendszer megfigyelhető.