Computer controlled systems

Lecture 2

version: 2017.09.21. – 12:52:02

Possible SISO system representations

$$\text{linear scalar differential equation:} \quad \ddot{y} + a\dot{y} + by = u(t),\ y(0),\ \dot{y}(0) \tag{1}$$

$$\text{linear first order equation system (state space model):} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

Problem types

- convolution of two given functions
- partial fractional decomposition (needed for inverse Laplace transform)
- Solve the initial value problem (2) (respectively (1)) if $u(t) \equiv 0$, using Laplace transformation
- Solve the differential equation (2) (respectively (1)) if the initial conditions are zero and there is a given input function (eg. $u(t) = e^{-2t}$), using Laplace transformation
- Solve the initial value problem (2) (respectively (1)) for a given input function, using Laplace transformation
- Consider system (2) (respectively (1)), using Laplace transformation, determine its
  - transfer function $H(s)$
  - impulse response $h(t)$
  - step response $v(t)$
  - response for an arbitrary input $u(t)$. $(y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{H(s)U(s)\})$

1 Laplace transformation

Definíció: $f(t) \to F(s) \quad s \in \mathbb{C}$

$$\boxed{F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t} \tag{3}$$

A laplace transformation az integrálás tulajdonságai alapján lineáris leképezés, megőrzi az összeadás és a skalárral való szorzás műveleteket.

1.1 Szabályok

1. Konvolúció időtartományban: $\boxed{\mathfrak{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s),}$

   ahol $F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$, $G(s) = \mathfrak{L}\{g(t)\}$, $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$. Levezetés:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{(f*g)(t)\} &= \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\; e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t\;\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}\mathrm{d}t\; f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty \int_0^\infty g(\vartheta)e^{-s\vartheta}\mathrm{d}\vartheta\; f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^\infty g(\vartheta)e^{-s\vartheta}\mathrm{d}\vartheta \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau = \end{aligned} \tag{4}$$

   Olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyekre $f(t) = g(t) = 0$ bármely $t < 0$, ezért

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad \text{mivel } g(t-\tau) = 0 \text{ bármely } \tau > t \tag{5}$$

   A konvolúció levezetése során ezt is felhasználtam (itt egy változócsere történik: $\vartheta = t - \tau$):

$$\int_0^\infty g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}\mathrm{d}t = \int_{-\tau}^\infty g(\vartheta)e^{-s\vartheta}\mathrm{d}\vartheta = \int_0^\infty g(\vartheta)e^{-s\vartheta}\mathrm{d}\vartheta \quad \text{mivel } g(t<0) = 0 \tag{6}$$

2. Függvény idő szerinti deriváltjára vonatkozó képlet:

   $\boxed{\mathfrak{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0),}$ ahol $Y(s) = \mathfrak{L}\{y(t)\}$. Levezetés:

$$\int_0^\infty \dot{y}(t)e^{-st}\mathrm{d}t = y(t)e^{-st}\Big|_0^\infty - (-s)\int_0^\infty y(t)e^{-st}\mathrm{d}t = -y(0) + s\mathfrak{L}\{y(t)\} \tag{7}$$

3. Függvény idő szerinti második deriváltjára vonatkozó képlet:

   $\boxed{\mathfrak{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2Y(s) - \dot{y}(0) - sy(0).}$ Levezetés:

$$\mathfrak{L}\{\ddot{y}(t)\} = s\mathfrak{L}\{\dot{y}(t)\} - \dot{y}(0) = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \tag{8}$$

   Ezek után nem nehéz általánosítani...

1.2 Határértéktételek

1. $\boxed{y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s))}$ (Kezdeti érték tétel)

   Bizonyítás. Vegyük a deriválási szabály

$$\int_0^\infty \dot{y}(t)e^{-st}\mathrm{d}t = sY(s) - y(0) \tag{9}$$

   mindkét oldalának határértékét ha $s \to 0$:

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{\to 1}\underbrace{\dot{y}(t)\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}y(t)} = \lim_{s\to 0}(sY(s) - y(0)) \tag{10}$$

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \mathrm{d}y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) - y(0) \tag{11}$$

$$y(\infty) - y(0) = \lim_{s\to 0} sY(s) - y(0) \quad\Rightarrow\quad y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) \tag{12}$$

2. $\boxed{y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s)}$ (Végérték tétel)

   Bizonyítás. Vegyük a deriválási szabály mindkét oldalának határértékét ha $s \to \infty$:

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{\to 0}\dot{y}(t)\mathrm{d}t = \lim_{s\to\infty}(sY(s) - y(0)) \quad\Rightarrow\quad y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) \tag{13}$$

1.3 Nevezetes függvények Laplace transzformációja

1. $\boxed{\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = 1}$ Levezetés: $\int_0^\infty \delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1-e^{-sT}}{T}}_{s} = 1$

2. $\boxed{\mathfrak{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}}$ Levezetés: $\int_0^\infty 1(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$,
   ahol $1(t)$ az egységugrás függvény, $u(t)$-vel is szokás jelölni, azonban itt az $u(t)$ a rendszer bemenetét fogja jelölni.

3. $\mathfrak{L}\{t \cdot 1(t)\} = \frac{1}{s^2}$ (sebességugrás függvény)

4. $\boxed{\mathfrak{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a},}$ inverz laplace transformation esetén ez a leghasznosabb.

5. $\mathfrak{L}\{e^{-t/T}\} = \frac{1}{s+1/T} = \frac{T}{1+sT}$, az előzőnek egy másik alakja.
   Levezetés: $\int_0^\infty e^{-t/T}e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s+1/T)t}\mathrm{d}t \left[\frac{e^{-(s+1/T)t}}{-(s+1/T)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+1/T} = \frac{T}{1+sT}$

   pólus-zérus alak $\frac{1}{s+1/T}$

   időállandós alak $\frac{T}{1+sT}$

6. $\mathfrak{L}\{1 - e^{-t/T}\} = \frac{1}{s(1+sT)}$ (időállandós alak)

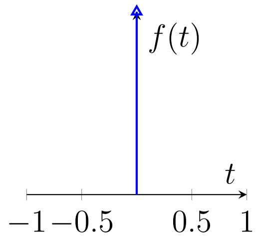
7. $\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{T_1-T_2}(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2})\right\} = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$

1.4 Inverz Laplace transformation

$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\lim_{T\to\infty}\int_{c-jT}^{c+jT} F(s)e^{ts}ds$
ahol $c \in \mathbb{R}$ nagyobb mint F(s) szingularitásainak valós részei.

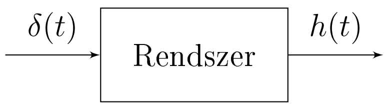
1.5 Input, impulse response

1. **Dirac impulse function**



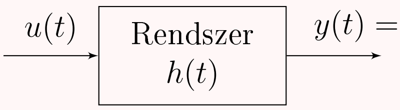
$$f_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{ha } 0 \le t < \tau \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad \delta(t) = \lim_{\tau \to 0^+} f_\tau(t)$$

2. **Rendszer válasza a Dirac impulzusra (impulzusválasz)**: $h(t)$
   Pl. ha ráütök ($\delta(t)$) egy éppen nyugalomban lévő csapóajtóra, vagy egy rugóra függesztett testre (rendszer), akkor az elkezd oszcillálni, majd szép lassan megáll ($h(t)$).



   Konvolúciós időinvariancia: $\delta(t-\tau)$ bemenet esetén $h(t-\tau)$. Vagyis, ma is holnap is, bármikor, ha ezt a kísérletet megismétlem, ugyanazt fogom tapasztalni.

3. **Rendszer válasza $u(t)$-re (átmeneti függvény)**: Kauzális konvolúció



$$y(t) = (u * h)(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Example 1. Számítsuk ki $f(t) = t$ és $g(t) = t^2$ konvolúcióját:

$$(f * g)(t) = \int_0^t (t-\tau)\tau^2 d\tau = \int_0^t t\tau^2 - \tau^3 d\tau = \left[\frac{t\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4}\right]_0^t = \frac{t^4}{12} \tag{14}$$

2 Laplace transformation alkalmazása kezdeti érték probléma megoldására

Example 2. Állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet

Oldjuk meg a következő kezdetiérték problémát:

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = -8e^{-t} \quad y(0) = 2 \quad \dot{y}(0) = 12$$

A linearitásból adódóan az összeget lehet tagonként Laplace transzformálni.

$$\mathfrak{L}\{\ddot{y}\} - 2\mathfrak{L}\{\dot{y}\} + 5\mathfrak{L}\{y\} = -\frac{8}{s+1} \tag{15}$$

A Laplace transformation derivált függvényre vonatkozó képlete: $\mathfrak{L}\{\dot{y}\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2$. Második derivált pedig: $\mathfrak{L}\{\ddot{y}\} = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = s^2Y(s) - 2s - 12$. Így a (15) egyenlet a következő képpen alakul:

$$(s^2Y(s) - 2s - 12) - 2(sY(s) - 2) + 5Y(s) = -\frac{8}{s+1} \tag{16}$$

$Y(s)$-t kifejezve kapjuk, hogy:

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)} \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}} y(t) =? \tag{17}$$

Example 3. Parciális törtekre bontás

Oldjuk meg a következő kezdetiérték problémát:

$$\dddot{y} + 7\ddot{y} + 14\dot{y} + 8y = 0 \quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y}(0) = 2$$

Kezdeti értékek fizikai jelentése: nyugalomban lévő testre hat egy gyorsulásvektor (pl. gravitációs gyorsulás). Az előző feladathoz hasonlóan ha vesszük az egyenlet mindkét oldalának Laplace transzformáltját, kapjuk, hogy:

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+2} + \frac{C_3}{s+4} \quad \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}} \quad y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + C_3e^{-4t}$$

Ha a nevező minden gyöke egyszeres, a számlálóban szereplő konstansok az alábbi képlet alkalmazásával számolhatók:

$$C_i = \lim_{s\to\alpha_i}(s-\alpha_i)Y(s), \quad \text{ahol } \alpha_i \text{ az } \frac{C_i}{s+\alpha_i} \text{ gyöke}$$

$$C_1 = \lim_{s\to-1}(s+1)Y(s) = \frac{2}{(s+2)(s+4)}\,|_{s=-1} = \frac{2}{3}$$

$$C_2 = \lim_{s\to-2}(s+2)Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+4)}\,|_{s=-2} = -1$$

$$C_3 = \lim_{s\to-4}(s+4)Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}\,|_{s=-4} = \frac{1}{3}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{-1}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{s+4} \tag{18}$$

Tehát a megoldás:

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \tag{19}$$

Matlab 1. Inverz Laplace transformation`syms`,`partfrac`,`ilaplace`,`residue`,`poly2sym`,`sym2poly`

2. Példa folytatása:

$$Y(s) = \frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)} = \frac{3s+5}{s^2-2s+5} - \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 3\mathrm{e}^t\left(\cos(2t) + \frac{4\sin(2t)}{3}\right) - \mathrm{e}^{-t}$$

Szimbolikus Toolbox segítségével:

```
>> syms s
>> Y = partfrac( (2*s^2 + 10*s) / ((s+1) * (s^2 - 2*s + 5)) )
Y =
(3*s + 5)/(s^2 - 2*s + 5) - 1/(s + 1)
>> ilaplace(Y)
ans =
3*exp(t)*(cos(2*t) + (4*sin(2*t))/3) - exp(-t)
```

Numerikus számításokkal:

```
>> Y = expand((s+1) * (s^2 - 2*s + 5))
Y =
s^3 - s^2 + 3*s + 5
>> B = [2 10 0];
>> A = sym2poly(Y)
A =
     1    -1     3     5
>> [r,p,k] = residue(B,A)
r =
   1.5 - 2i
   1.5 + 2i
  -1   + 0i
p =
   1   + 2i
   1   - 2i
  -1   + 0i
k =
     []
```

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \sum_i \frac{r_i}{s-p_i} + K(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1.5-2j}{s-1-2j} + \frac{1.5+2j}{s-1+2j} \tag{20}$$

```
>> Y = sum(r ./ (s - p)) + poly2sym(k)
Y =
- 1/(s + 1) + (3/2 - 2i)/(s - 1 - 2i) + (3/2 + 2i)/(s - 1 + 2i)
>> latex(Y)
ans =
 - \frac{1}{s + 1} + \frac{\frac{3}{2} - 2\, \mathrm{i}}{s - 1 - 2\, \mathrm{i}} + \frac{\frac{3}{2} + 2\, [...]
>> ilaplace(Y)
ans =
- exp(-t) + exp(t*(1 - 2i))*(3/2 + 2i) + exp(t*(1 + 2i))*(3/2 - 2i)
>> Y = simplify(Y)
ans =
(2*s*(s + 5))/(s^3 - s^2 + 3*s + 5)
>> ilaplace(Y)
ans =
3*exp(t)*(cos(2*t) + (4*sin(2*t))/3) - exp(-t)
```

$$y(t) = -\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{t\,(1-2j)}\left(\frac{3}{2}+2j\right) e^{t\,(1+2j)}\left(\frac{3}{2}-2j\right) = 3\mathrm{e}^t\left(\cos(2t) + \frac{4\sin(2t)}{3}\right) - \mathrm{e}^{-t} \tag{21}$$

Example 4.

Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet rendszer

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2\end{aligned} \quad \rightarrow \quad \dot{x} = Ax \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $x(t) = e^{At}x_0$, $\boxed{e^{At} = Se^{Dt}S^{-1} = \mathfrak{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}.}$

Az első egyenlet a sajátért-sajátvektor felbontásból adódik (előző gyakorlat anyaga). e^{At} második kifejezése pedig onnan ered, hogy egydimenzióban:

$$e^{at} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{(s-a)^{-1}\right\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} \tag{22}$$

A két kifejezés közül bármelyik használgató. Itt most a második szerepel:

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-2 & -3 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix} = (s-2)(s-1) - 6 = s^2 - 3s - 4 = (s-4)(s+1) \tag{23}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-4)(s+1)} \begin{bmatrix} s-1 & 3 \\ 2 & s-2 \end{bmatrix}$$

A Laplace transformation linearitása miatt a konstans szorzó (az x_0 kezdeti érték) bevihető a leképezés belsejébe.

$$e^{At}x_0 = \mathfrak{L}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{3}{(s-4)(s+1)} \\ \dfrac{s-2}{(s-4)(s+1)} \end{bmatrix}$$

Parciális törtekre bontás („pikk-pakk" eljárással):

$$\frac{3}{(s-4)(s+1)} = \frac{3}{5}\frac{(s+1)-(s-4)}{(s-4)(s+1)} = \frac{0.6}{s-4} - \frac{0.6}{s+1} \tag{24}$$

Ezt egyszerűbb a bejáratott módszerrel:

$$\frac{s-2}{s^2-3s-4} = \frac{C_3}{s+1} + \frac{C_4}{s-4} \rightarrow C_3 = 0.6 \quad C_4 = 0.4 \tag{25}$$

Végül kapjuk:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{-0.6}{s+1} + \dfrac{0.6}{s-4} \\ \dfrac{0.6}{s+1} + \dfrac{0.4}{s-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6e^{-t} + 0.6e^{4t} \\ 0.6e^{-t} + 0.4e^{4t} \end{bmatrix} \tag{26}$$

Ha a második képletet alkalmaztam volna: $e^{At} = Se^{Dt}S^{-1}$, akkor nem kellett volna parciális törtekre bontani, azonban sajátvektorokat kell számolni (időnként ez egyszerűbb).

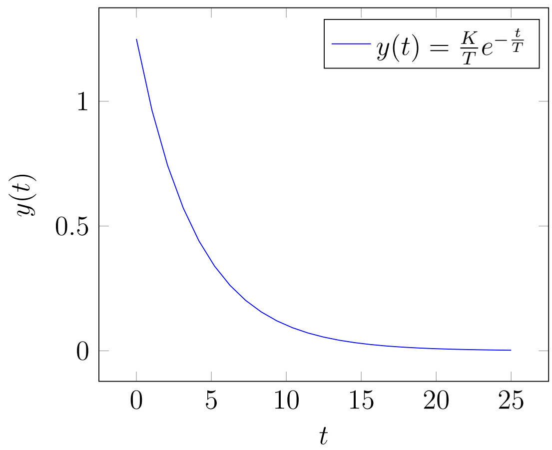
Matlab 2. $\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0$ megolása szimbolikus toolboxal `eig,syms,expand,pretty,diag`

$$\dot{x} = Ax\ ,\quad x(0) = x_0 \text{ megoldása } x(t) = e^{At}x_0\ ,\quad e^{At} = Se^{Dt}S^{-1} \text{ képlettel} \tag{27}$$

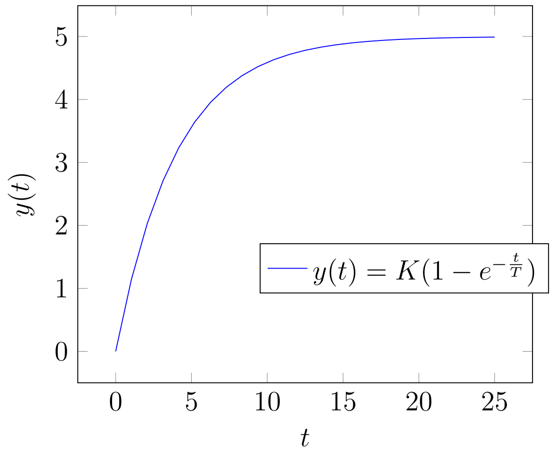
```
syms t real

A = [2 3 ; 2 1];
x0 = [0;1];

[S,D] = eig(A);

SDS_A_iszero = S * D / S - A

exp_Dt = diag(exp(diag(D)*t));
fprintf('\nexp(Dt) = \n\n')
pretty(exp_Dt)

exp_At = expand(S * exp_Dt / S);
fprintf('\n[Matlabbal szamolt sajatvektorok] \nexp(At) = \n\n'), pretty(exp_At)

xt = exp_At * x0;
fprintf('\nA differencialegyenlet megoldasa: x(t) = \n\n')
pretty(expand(xt))
```

Eredmény:

```
exp(Dt) =

/ exp(4 t),    0    \
|                   |
\     0,    exp(-t) /


[Matlabbal szamolt sajatvektorok]
exp(At) =

/ 2 exp(-t)   exp(4 t) 3  exp(4 t) 3   3 exp(-t) \
| --------- + ----------, ---------- - --------- |
|     5           5           5           5     |
|                                               |
| exp(4 t) 2   2 exp(-t)  3 exp(-t)   exp(4 t) 2 |
| ---------- - ---------, --------- + ---------- |
\      5           5          5           5     /

A differencialegyenlet megoldasa: x(t) =

/ exp(4 t) 3   3 exp(-t) \
| ---------- - --------- |
|      5           5     |
|                        |
| 3 exp(-t)   exp(4 t) 2 |
| --------- + ---------- |
\     5           5     /
```



(a) Rendszerválasz a Dirac implzus bemenetre



(b) Rendszerválasz az egységugrás bementre

Figure 1. Egytárolós rendszer válasza

Example 5. Laplace transformation alkalmazása átviteli függvény és rendszerválasz számítására

A rendszert leíró differenciálegyenlet: $T\dot{y} + y = Ku(t) \quad y(0) = 0$
Határozzuk meg a rendszer válaszát az alábbi esetekben:

1. $u(t) = \delta(t)$
2. $u(t) = 1(t)$

A rendszer Laplace transzformáltja: $TsY(s) + Y(s) = KU(s)$, ahol $T \in \mathbb{R}$ és $K \in \mathbb{R}$ rendszerfüggő paraméterek. Az átviteli függvény:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + Ts} \tag{28}$$

A rendszer válasza: $Y(s) = \frac{K}{1+Ts}U(s)$

1. impulzusválasz

$$u(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathfrak{L}} U(s) = 1$$

$$Y(s) = K\frac{1}{1 + Ts} \quad \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}} \quad y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{K}{T}\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right\} = \frac{K}{T}e^{-t/T}$$

2. átmeneti függvény (egységugrásra adott válasz)

$$u(t) = 1(t) \xrightarrow{\mathfrak{L}} U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = K\frac{1}{s(1 + Ts)} \quad \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}}$$

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{K}{T} \cdot \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right\} = \frac{K}{T} \cdot (1(t) * e^{\frac{-t}{T}}) = K(1 - e^{-t/T})$$

$K = 5$ és $T = 4$ esetén a példa megoldásainak szemléltetése látható a fenti ábrán.

3 Állapotegyenlet megoldása

- Ha csak gerjesztése van ($x_0 = 0, u(t) \neq 0$) $\rightarrow$ Laplace transformation alkalmazása
- Ha csak kezdeti feltétel van ($x_0 \neq 0, u(t) = 0$) $\rightarrow$ $e^{At}x_0$, állapottrajektória
- Ha kezdeti feltétel is van, és gerjesztés is

Example 6. ÁTM megoldása – egységugrás bemenetre

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u(t) = 1(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{29}$$

Laplace transformation alkalmazása:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \rightarrow sX(s) - AX(s) = BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$H(s) = Y(s)/U(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s}{s^2 - 3s - 4} = \frac{s}{(s+1)(s-4)}$$

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{s}{(s+1)(s-4)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)(s-4)} = \frac{0.2}{s-4} - \frac{0.2}{s+1}$$

$$y(t) = 0.2e^{4t} - 0.2e^{-t}$$

Example 7. ÁTM megoldása – autonóm rendszerre

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u(t) = 0$$

Laplace transformation alkalmazása:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) \quad \rightarrow \quad X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 \quad \rightarrow \quad x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x_0 = e^{At}x_0$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s-4)} \cdot \begin{bmatrix} s-1 & 3 \\ 2 & s-2 \end{bmatrix}$$

Kimenet: $y(t) = Cx(t) = C \cdot \mathfrak{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \cdot x_0 = \mathfrak{L}^{-1}\{C(sI - A)^{-1}x_0\} = \mathfrak{L}^{-1}\{\frac{s-2}{(s+1)(s-4)}\} = 0.6e^{-t} + 0.4e^{4t}$

Example 8. (ÁTM megoldása – sebességugrásra)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u(t) = t$$

Laplace transformation alkalmazása:

$$sX(s) - x_0 = X(s) + BU(s) \quad \rightarrow \quad X(s) = (sI - A)^{-1}(x_0 + BU(s)) \quad \rightarrow$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Ha $t_0 = 0$, akkor $e^{A(t-t_0)} = e^{At}$

$$e^{At} = \mathfrak{L}^{-1}\{\begin{bmatrix} \frac{s-1}{s^2-3s-4} & \frac{3}{s^2-3s-4} \\ \frac{2}{s^2-3s-4} & \frac{s-2}{s^2-3s-4} \end{bmatrix}\} = \mathfrak{L}^{-1}\{\begin{bmatrix} \frac{0.6}{s-4} + \frac{0.4}{s+1} & \frac{0.6}{s-4} - \frac{0.6}{s+1} \\ \frac{0.4}{s-4} - \frac{0.4}{s+1} & \frac{0.4}{s-4} + \frac{0.6}{s+1} \end{bmatrix}\}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 0.6e^{4t} + 0.4e^{-t} & 0.6e^{4t} - 0.6e^{-t} \\ 0.4e^{4t} - 0.4e^{-t} & 0.4e^{4t} + 0.6e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$e^{A(t-\tau)} = \begin{bmatrix} 0.6e^{4(t-\tau)} + 0.4e^{-(t-\tau)} & 0.6e^{4(t-\tau)} - 0.6e^{-(t-\tau)} \\ 0.4e^{4(t-\tau)} - 0.4e^{-(t-\tau)} & 0.4e^{4(t-\tau)} + 0.6e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$e^{A(t-\tau)}B = \begin{bmatrix} 1.2e^{4(t-\tau)} - 0.2e^{-(t-\tau)} \\ 0.8e^{4(t-\tau)} + 0.2e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \rightarrow e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) = \begin{bmatrix} 1.2e^{4(t-\tau)}\tau - 0.2e^{-(t-\tau)}\tau \\ 0.8e^{4(t-\tau)}\tau + 0.2e^{-(t-\tau)}\tau \end{bmatrix}$$

Elemenkénti integrálás:

$\int_0^t c_1 e^{c_2(t-\tau)}\tau d\tau = c_1 e^{c_2 t}\int_0^t e^{-c_2\tau}\tau d\tau = \frac{c_1}{c_2^2}(e^{c_2 t} - c_2 t - 1)$ (Parciális integrálás)

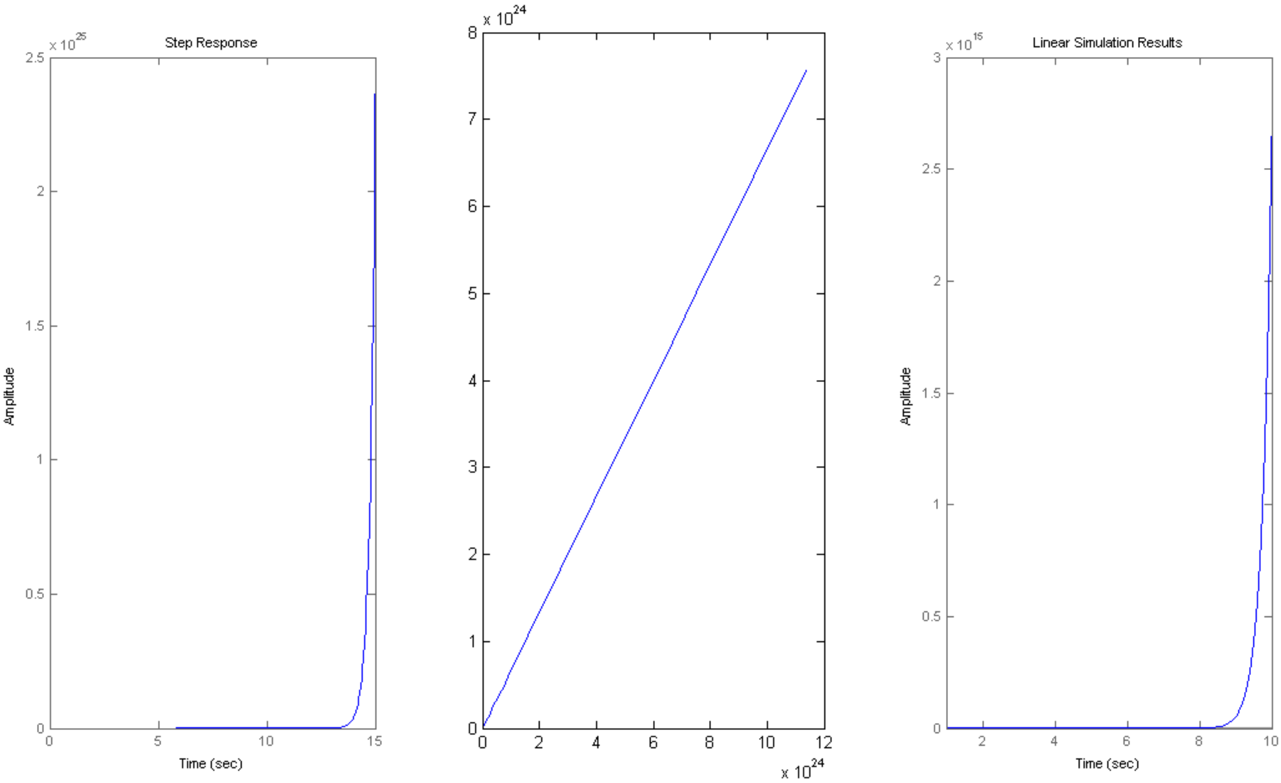
$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} 0.075e^{4t} - 0.2e^{-t} - 0.5t + 0.125 \\ 0.05e^{4t} + 0.2e^{-t} - 0.25 \end{bmatrix}$$

$e^{At}x_0$ értéke megegyezik a 2. példában szereplő értékkel, ezt alkalmazva

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0.675e^{4t} - 0.8e^{-t} - 0.5t + 0.125 \\ 0.45e^{4t} + 0.8e^{-t} - 0.25 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t) = 0.45e^{4t} + 0.8e^{-t} - 0.25$$

Az ábrán rendre a három példa megoldása látható.


Step Response
Amplitude
Time (sec)
x 10^24
Linear Simulation Results
Amplitude
Time (sec)