

# Computer controlled systems

Lecture 11, November 29, 2017

version: 2017.11.29. – 15:46:36 [ $\beta$  version]

## 1. Mintavételezett állapotegyenlet, diszkrét idejű állapotér modell

**Cél:** Az állapotér modell diszkretizálása, hiszen egy számítógép nem folytonos, hanem digitális jelekkel dolgozik. A számítógépvezérelt rendszerekben diszkrét idejű szabályozók vannak. A szabályozók tervezéséhez és implementálásához tehát szükségünk van a modell diszkretizálására.

**Megjegyzés:** Bonyolult rendszerek esetén általános eljárás, hogy először folytonos időben modellezünk, és tervezzük meg a szabályozót, majd utána diszkretizáljuk az egész rendszert egy megfelelő mintavételi idővel. A mintavételi időhöz a legfontosabb megkötés az, hogy nem ronthatja el a rendszer stabilitását. Persze emellett figyelembe kell venni a szabályozó alatt működő hardver képességeit.

### 1.1. Állapotegyenlet diszkretizálása

A folytonos idejű állapotegyenlet:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Helyettesítés:  $t = t_{k+1}$  és  $t_0 = t_k$

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Legyen  $\phi = \tau - t_k$ ,  $h = t_{k+1} - t_k$ , így  $t_{k+1} - \tau = h - \phi$

$$x(k+1) = e^{Ah}x(k) + \int_0^h e^{A(h-\phi)}Bu(k)d\phi$$

$$x(k+1) = e^{Ah}x(k) + A^{-1}(e^{Ah} - I)Bu(k)$$

### 1.2. Diszkrét idejű állapotér modell (DT-LTI)

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Ahol  $\Phi = e^{Ah} = I + Ah + \dots$  és  $\Gamma = A^{-1}(e^{Ah} - I)B = (Ih + \frac{Ah^2}{2!} + \dots)B$

#### 1.2.1. DT-LTI állapotegyenletek megoldása

$$x(1) = \Phi x(0) + \Gamma u(0)$$

$$x(2) = \Phi x(1) + \Gamma u(1) = \Phi^2 x(0) + \Phi \Gamma u(0) + \Gamma u(1)$$

$$x(3) = \Phi x(2) + \Gamma u(2) = \Phi^3 x(0) + \Phi^2 \Gamma u(0) + \Phi \Gamma u(1) + \Gamma u(2)$$

$$\vdots$$

$$x(k) = \Phi x(k-1) + \Gamma u(k-1) = \Phi^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j)$$

### 1.3. Példák

#### 1. Példa

Adott a következő CT-LTI állapotter modell.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0)$$

Diszkrétizáljuk  $h = \log(2)$  mintavételi idővel!

**MO:**

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ 0 & s-2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-2} & \left(\frac{1}{s-2}\right)^2 \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{pmatrix} \rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Phi = e^{Ah} = \begin{pmatrix} e^{2\log 2} & \log 2 e^{2\log 2} \\ 0 & e^{2\log 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \log 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = A^{-1}(e^{Ah} - I)B = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

#### 2. Példa

Adott egy DT-LTI rendszer a következő mátrixokkal:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0)$$

- (a) Határozzuk meg a rendszer állapotvektorát az  $x(2)$  időpontban  $u(k) = 1 \quad k = 0, 1, \dots$  bemenet esetén!

$$x(0) = (1 \quad 1)^\top$$

Kezdeti értékektől való függés:

$$\Phi^2 x(0) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

A bemeneti jel hatása

$$\sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tehát

$$x(2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- (b) Határozzuk meg azt a minimális hosszúságú bemeneti jelsorozatot, amely a rendszert az  $x(0) = (1 \quad 1)^\top$  állapotból az  $x(n) = (13 \quad 10)^\top$  állapotba viszi!

**MO:**

Ehhez szükségünk van az irányíthatósági mátrix kiszámolásánál használt képletre:

$$x(n) = \Phi^n x(0) + W_c \mathcal{U}$$

ahol  $W_c$  a diszkrét idejű irányíthatósági teszt mátrix. Illetve az  $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix}$$

A képletet átrendezve és  $n$  értékét behelyettesítve kapjuk, hogy

$$W_c^{-1}(x(2) - \Phi^2 x(0)) = \mathcal{U}$$

A számítást elvégezve kapjuk, hogy

$$u_0 = 1 \rightarrow x_1 = (4 \ 3)^\top \quad u_1 = 3 \rightarrow x_2 = (13 \ 10)^\top$$

(c) Határozzuk meg a rendszer kezdeti állapotát, ha a bemeneti jelsorozat  $u(0) = u(1) = 0$ , a kimeneten pedig  $y(0) = y(1) = -1$  értékeket mértünk.

**MO:**

$$y(1) = x_1(1) = x_1(0) + 2x_2(0) \rightarrow x_2(0) = 0$$

### 3. Példa

Adott egy DT-LTI rendszer a következő mátrixokkal, valamint a bemeneti jelsorozat.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u(k) = 1, \quad k = 0, \dots, 9$$

Adja meg az állapotvektor értéket  $x(10)$ -ben!

$$\begin{aligned} x(10) &= \Phi^{10}x(0) + \sum_{j=0}^9 \Phi^{10-j-1}\Gamma u(j) \\ &= \Phi^{10}x(0) + \Phi^9\Gamma u(0) + \Phi^8\Gamma u(1) + \dots + \Phi\Gamma u(8) + \Gamma u(9) \end{aligned}$$

Mivel  $\Phi$  nilpotens mátrix, ezért a 2-nél magasabb hatványai nullmátrixok. Behelyettesítve az értékeket kapjuk, hogy

$$x(10) = \Gamma u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

### 4. Példa

Adott a következő differencia egyenlet:

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 12y(k) = -2u(k+1) + 5u(k) \quad (2)$$

Adja meg a fenti differencia egyenlet impulzusátviteli operátorát,  $H(q)$ -t!

$$(q^2 - 3q - 12)y(k) = (-2q + 5)u(k) \quad (3)$$

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) \quad (4)$$

$$H(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{-2q + 5}{q^2 - 3q + 12} \quad (5)$$

Adjon ÁTM-t a fenti impulzus átviteli operátorhoz!

Megoldás: Controller Form

$$\Phi = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (-2 \ 5)$$

### 5. Példa

Adott a következő DT-LTI modell

$$\Phi = \begin{pmatrix} -0.25 & -0.3 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (-3 \ 0)$$

Adja meg a rendszer impulzusátviteli operátorát,  $H(q)$ -t!

$$\begin{aligned} H(q) &= C(qI - \Phi)^{-1}\Gamma + D \\ &= (-3 \ 0) \left[ \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.25 & -0.3 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(q+0.25)(q-0.4)} (-3 \ 0) \begin{pmatrix} q-0.4 & 0.3 \\ 0 & q+0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-3}{(q+0.25)} \end{aligned}$$

Adja meg a rendszer diszkrét idejű impulzusátviteli függvényét,  $h(t)$ -t a  $t = 0, 1, \dots, 6$  időpontokban!

$$h(k) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k < 1 \\ C\Phi^{k-1}\Gamma & \text{ha } k \leq 1 \end{cases}$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(1) &= C\Phi^0\Gamma = (-3 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \\ h(2) &= C\Phi^1\Gamma = (-3 \ 0) \begin{pmatrix} -0.25 & -0.3 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.75 \\ h(3) &= 0.18 \\ h(4) &= 0.04 \\ h(5) &= -0.01 \\ h(6) &= 0.0029 \end{aligned}$$

## 2. Diszkrét idejű rendszerek stabilitása

**Tétel** Egy DT-LTI rendszer aszimptotikusan stabil pontosan akkor, ha  $\lambda_i(\Phi)$  értékek a komplex egységkörön belül vannak.

**Példa:** Stabil-e az alábbi DT-LTI rendszer?

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0)$$

**MO:** Nem stabil, hiszen az egyik sajátérték a komplex egységkörön kívül van.

## 3. Diszkrét idejű rendszerek irányíthatósága, elérhetősége és megfigyelhetősége

Az **elérhetőségből** mindig következik az irányíthatóság, de fordítva csak akkor igaz, ha  $\exists \Phi^{-1}$ . **Elérhetőség:** Ha  $W_c = (\Gamma \ \Phi\Gamma \ \dots \ \Phi^{n-1}\Gamma)$  mátrix teljes rangú.

**Megfigyelhetőség:** Ha  $W_o = \begin{pmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{pmatrix}$  mátrix teljes rangú.

**Példa**

Adott a következő DT-LTI rendszer

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Irányítható-e, illetve elérhető-e ez a rendszer?

Írjuk fel az állapotegyenleteket!

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= 0 \end{aligned}$$

Az irányíthatósághoz az kell, hogy tetszőleges kezdeti értékből a rendszert az origóba tudjuk vezérelni. Legyen a kezdeti érték például

$$x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ahol,  $a, b \in \mathcal{R}$  tetszőleges. Válasszuk a bemeneti jelsorozatot a következőképpen:

$$u(k) = -(a + b), 0, \dots$$

Ekkor az állapotegyenletek a következők lesznek:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= a + b - a - b \\ x_2(1) &= 0 \end{aligned}$$

Ebből látszik, hogy a rendszer irányítható.

Az elérhetőséghez azt kell elérni, hogy a rendszert tetszőleges állapotba elvihessük az állapotterben. Viszont a fenti példán látszik, hogy az  $x_2$  állapotváltozó értékét semmilyen bemenettel nem tudjuk megváltoztatni. Ez pedig abból következik, hogy a  $\Phi$  mátrix szinguláris.

**Példa:** Adott a következő DT-LTI rendszer. Irányítható, elérhető illetve megfigyelhető-e?

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0)$$

**MO:** Mivel  $\Phi$  invertálható, ezért az irányíthatóság megfelel az elérhetőségnek.

$$W_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Mivel  $W_c$  teljes rangú, ezért a rendszer irányítható és elérhető.

$$W_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mivel  $W_o$  teljes rangú, ezért a rendszer megfigyelhető.