

Computer controlled systems

Lecture 2

version: 2017.09.18. – 21:51:17

Feladattípusok

- két függvény konvolúciója
- $\ddot{y} + a\dot{y} + by = e^{-at}$, $y(0)$, $\dot{y}(0)$ típusú kezdetiérték feladatok megoldása (Laplace transzformációval)
- parciális törtekre bontás (Laplace transzformációból adódó racionális törtfüggvények miatt)
- $\ddot{y} + a\dot{y} + by = u(t)$ -al megadott rendszerek átviteli függvényének ($H(s)$) kiszámítása
- $\dot{x} = Ax$, $x(0)$ típusú kezdetiérték feladatok megoldása Laplace transzformációval
- állapottermodellel megadott rendszer ($\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$) átviteli függvényének ($H(s)$) kiszámítása
- állapottermodell megoldása adott bemeneti függvények és adott kezdetiérték feltételek mellett – impulzusválasz ($h(t)$), egységugrásra adott válasz (átmeneti függvény – step response, $v(t)$) kiszámítása

1. Laplace transzformáció

Definíció: $f(t) \rightarrow F(s)$ $s \in \mathbb{C}$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

A Laplace transzformáció az integrálás tulajdonságai alapján lineáris leképezés, megőrzi az összeadás és a skalárral való szorzás műveleteket.

1.1. Szabályok

1. Konvolúció időtartományban: $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$,

ahol $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$. Levezetés:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(f * g)(t)\} &= \int_0^{\infty} \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)e^{-st} dt d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(t - \tau)e^{-s(t - \tau)} dt f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\vartheta)e^{-s\vartheta} d\vartheta f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} g(\vartheta)e^{-s\vartheta} d\vartheta \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = \end{aligned} \quad (2)$$

Olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyekre $f(t) = g(t) = 0$ bármely $t < 0$, ezért

$$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad \text{mivel } g(t - \tau) = 0 \text{ bármely } \tau > t \quad (3)$$

A konvolúció levezetése során ezt is felhasználtam (itt egy változócsere történik: $\vartheta = t - \tau$):

$$\int_0^{\infty} g(t - \tau)e^{-s(t - \tau)} dt = \int_{-\tau}^{\infty} g(\vartheta)e^{-s\vartheta} d\vartheta = \int_0^{\infty} g(\vartheta)e^{-s\vartheta} d\vartheta \quad \text{mivel } g(t < 0) = 0 \quad (4)$$

2. Függvény idő szerinti deriváltjára vonatkozó képlet:

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0), \text{ ahol } Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}. \text{ Levezetés:}$$

$$\int_0^{\infty} \dot{y}(t)e^{-st} dt = y(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} - (-s) \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt = -y(0) + s\mathcal{L}\{y(t)\} \quad (5)$$

3. Függvény idő szerinti második deriváltjára vonatkozó képlet:

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2Y(s) - \dot{y}(0) - sy(0). \text{ Levezetés:}$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} - \dot{y}(0) = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \quad (6)$$

Ezek után nem nehéz általánosítani...

1.2. Határértéktételek

1. $y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$ (Kezdeti érték tétel)

Bizonyítás. Vegyük a deriválási szabály mindkét oldalának határértékét ha $s \rightarrow \infty$:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-st}}_{\rightarrow 0} \dot{y}(t) dt = \lim_{s \rightarrow \infty} (sY(s) - y(0)) \Rightarrow y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) \quad (7)$$

2. $y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$ (Végérték tétel)

Bizonyítás. Vegyük a deriválási szabály

$$\int_0^{\infty} \dot{y}(t)e^{-st} dt = sY(s) - y(0) \quad (8)$$

mindkét oldalának határértékét ha $s \rightarrow 0$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-st}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\dot{y}(t)}_{dy(t)} dt = \lim_{s \rightarrow 0} (sY(s) - y(0)) \quad (9)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dy(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) - y(0) \quad (10)$$

$$y(\infty) - y(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) - y(0) \Rightarrow y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (11)$$

1.3. Nevezetes függvények Laplace transzformációja

1. $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ Levezetés: $\int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-st} dt = \frac{1}{s} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-sT}}{T} = 1$
L'Hospital: s

2. $\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$ Levezetés: $\int_0^{\infty} 1(t)e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s}$,

ahol $1(t)$ az egységugrás függvény, $u(t)$ -vel is szokás jelölni, azonban itt az $u(t)$ a rendszer bemenetét fogja jelölni.

3. $\mathcal{L}\{t \cdot 1(t)\} = \frac{1}{s^2}$ (sebességugrás függvény)

4. $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$, inverz laplace transzformáció esetén ez a leghasznosabb.

5. $\mathcal{L}\{e^{-t/T}\} = \frac{1}{s+1/T} = \frac{T}{1+sT}$, az előzőnek egy másik alakja.

$$\text{Levezetés: } \int_0^{\infty} e^{-t/T} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+1/T)t} dt \left[\frac{e^{-(s+1/T)t}}{-(s+1/T)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+1/T} = \frac{T}{1+sT}$$

pólus-zérus alak $\frac{1}{s+1/T}$

időállandós alak $\frac{T}{1+sT}$

6. $\mathcal{L}\{1 - e^{-t/T}\} = \frac{1}{s(1+sT)}$ (időállandós alak)

7. $\mathcal{L}\left\{ \frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) \right\} = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$

$$8. \mathfrak{L}\{e^{at} \sin(bt)\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$9. \mathfrak{L}\{e^{at} \cos(bt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

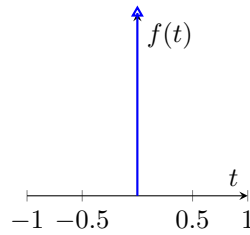
1.4. Inverz Laplace transzformáció

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-jT}^{c+jT} F(s) e^{ts} ds$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ nagyobb mint $F(s)$ szingularitásainak valós részei.

1.5. Bemenet, rendszerválasz

1. Dirac impulzus



$$f_{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{ha } 0 \leq t < \tau \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} f_{\tau}(t)$$

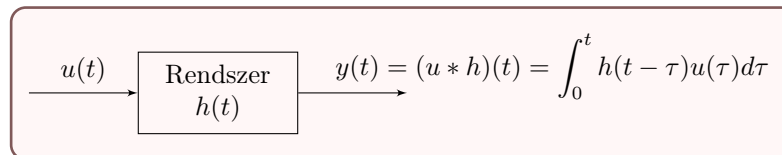
2. Rendszer válasza a Dirac impulzusra (impulzusválasz): $h(t)$

Pl. ha ráütök ($\delta(t)$) egy éppen nyugalomban lévő csapóajtóra, vagy egy rugóra függesztett testre (rendszer), akkor az elkezd oszcillálni, majd szép lassan megáll ($h(t)$).



Konvolúciós időinvariancia: $\delta(t - \tau)$ bemenet esetén $h(t - \tau)$. Vagyis, ma is holnap is, bármikor, ha ezt a kísérletet megismétlem, ugyanazt fogom tapasztalni.

3. Rendszer válasza $u(t)$ -re (átmeneti függvény): Kauzális konvolúció



Example 1.

Számítsuk ki $f(t) = t$ és $g(t) = t^2$ konvolúcióját:

$$(f * g)(t) = \int_0^t (t - \tau)\tau^2 d\tau = \int_0^t t\tau^2 - \tau^3 d\tau = \left[\frac{t\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4} \right]_0^t = \frac{t^4}{12} \quad (12)$$

2. Laplace transzformáció alkalmazása kezdeti érték probléma megoldására

Example 2.

Állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet

Oldjuk meg a következő kezdetiérték problémát:

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = -8e^{-t} \quad y(0) = 2 \quad \dot{y}(0) = 12$$

A linearitásból adódóan az összeget lehet tagonként Laplace transzformálni.

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}\} - 2\mathcal{L}\{\dot{y}\} + 5\mathcal{L}\{y\} = -\frac{8}{s+1} \quad (13)$$

A Laplace transzformáció derivált függvényre vonatkozó képlete: $\mathcal{L}\{\dot{y}\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2$. Második derivált pedig: $\mathcal{L}\{\ddot{y}\} = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = s^2Y(s) - 2s - 12$. Így a (13) egyenlet a következő képpen alakul:

$$(s^2Y(s) - 2s - 12) - 2(sY(s) - 2) + 5Y(s) = -\frac{8}{s+1} \quad (14)$$

$Y(s)$ -t kifejezve kapjuk, hogy:

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = ? \quad (15)$$

Example 3.

Parciális törtekre bontás

Oldjuk meg a következő kezdetiérték problémát:

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 14y + 8y = 0 \quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y}(0) = 2$$

Kezdeti értékek fizikai jelentése: nyugalomban lévő testre hat egy gyorsulásvektor (pl. gravitációs gyorsulás). Az előző feladathoz hasonlóan ha vesszük az egyenlet mindkét oldalának Laplace transzformáltját, kapjuk, hogy:

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+2} + \frac{C_3}{s+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + C_3e^{-4t}$$

Ha a nevező minden gyöke egyszerűes, a számlálóban szereplő konstansok az alábbi képlet alkalmazásával számolhatók:

$$C_i = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} (s - \alpha_i)Y(s), \quad \text{ahol } \alpha_i \text{ az } \frac{C_i}{s + \alpha_i} \text{ gyöke}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s + 1)Y(s) = \frac{2}{(s+2)(s+4)} \Big|_{s=-1} = \frac{2}{3}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2)Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+4)} \Big|_{s=-2} = -1$$

$$C_3 = \lim_{s \rightarrow -4} (s + 4)Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-4} = \frac{1}{3}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{-1}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{s+4} \quad (16)$$

Tehát a megoldás:

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \quad (17)$$

Matlab 1. Inverz Laplace transzformáció

`partfrac, ilaplace, residue, poly2sym, sym2poly`

2. Példa folytatása:

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)} = \frac{3s + 5}{s^2 - 2s + 5} - \frac{1}{s + 1} \Rightarrow y(t) = 3e^t \left(\cos(2t) + \frac{4 \sin(2t)}{3} \right) - e^{-t}$$

Szimbolikus Toolbox segítségével:

```
>> syms s
>> Y = partfrac( (2*s^2 + 10*s) / ((s+1) * (s^2 - 2*s + 5)) )
Y =
(3*s + 5)/(s^2 - 2*s + 5) - 1/(s + 1)
>> ilaplace(Y)
ans =
3*exp(t)*(cos(2*t) + (4*sin(2*t))/3) - exp(-t)
```

Numerikus számításokkal:

```

>> Y = expand((s+1) * (s^2 - 2*s + 5))
Y =
s^3 - s^2 + 3*s + 5
>> B = [2 10 0];
>> A = sym2poly(Y)
A =
    1    -1     3     5
>> [r,p,k] = residue(B,A)
r =
    1.5 - 2i
    1.5 + 2i
    -1 + 0i
p =
    1 + 2i
    1 - 2i
    -1 + 0i
k =
    []

```

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \sum_i \frac{r_i}{s - p_i} + K(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1.5-2j}{s-1-2j} + \frac{1.5+2j}{s-1+2j} \quad (18)$$

```

>> Y = sum(r ./ (s - p)) + poly2sym(k)
Y =
- 1/(s + 1) + (3/2 - 2i)/(s - 1 - 2i) + (3/2 + 2i)/(s - 1 + 2i)
>> latex(Y)
ans =
- \frac{1}{s + 1} + \frac{\frac{3}{2} - 2i}{s - 1 - 2i} + \frac{\frac{3}{2} + 2i}{s - 1 + 2i}, [...]
>> ilaplace(Y)
ans =
- exp(-t) + exp(t*(1 - 2i))*(3/2 + 2i) + exp(t*(1 + 2i))*(3/2 - 2i)
>> Y = simplify(Y)
ans =
(2*s*(s + 5))/(s^3 - s^2 + 3*s + 5)
>> ilaplace(Y)
ans =
3*exp(t)*(cos(2*t) + (4*sin(2*t))/3) - exp(-t)

```

$$y(t) = -e^{-t} + e^{t(1-2j)} \left(\frac{3}{2} + 2j \right) e^{t(1+2j)} \left(\frac{3}{2} - 2j \right) = 3e^t \left(\cos(2t) + \frac{4\sin(2t)}{3} \right) - e^{-t} \quad (19)$$

Example 4.

Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet rendszer

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \dot{x} = Ax \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: $x(t) = e^{At}x_0$, $e^{At} = Se^{Dt}S^{-1} = \mathfrak{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$.

Az első egyenlet a sajátért-sajátvektor felbontásból adódik (előző gyakorlat anyaga). e^{At} második kifejezése pedig onnan ered, hogy egydimenzióban:

$$e^{at} = \mathfrak{L}^{-1}\{(s - a)^{-1}\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\} \quad (20)$$

A két kifejezés közül bármelyik használható. Itt most a második szerepel:

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s - 2 & -3 \\ -2 & s - 1 \end{vmatrix} = (s - 2)(s - 1) - 6 = s^2 - 3s - 4 = (s - 4)(s + 1) \quad (21)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s - 4)(s + 1)} \begin{pmatrix} s - 1 & 3 \\ 2 & s - 2 \end{pmatrix}$$

A Laplace transzformáció linearitása miatt a konstans szorzó (az x_0 kezdeti érték) bevihető a leképezés belsejébe.

$$e^{At}x_0 = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{3}{(s - 4)(s + 1)} \\ \frac{s - 2}{(s - 4)(s + 1)} \end{pmatrix}\right\}$$

Parciális törtekre bontás („pikk-pakk” eljárással):

$$\frac{3}{(s - 4)(s + 1)} = \frac{3}{5} \frac{(s + 1) - (s - 4)}{(s - 4)(s + 1)} = \frac{0.6}{s - 4} - \frac{0.6}{s + 1} \quad (22)$$

Ezt egyszerűbb a bejáratott módszerrel:

$$\frac{s - 2}{s^2 - 3s - 4} = \frac{C_3}{s + 1} + \frac{C_4}{s - 4} \rightarrow C_3 = 0.6 \quad C_4 = 0.4 \quad (23)$$

Végül kapjuk:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{-0.6}{s + 1} + \frac{0.6}{s - 4} \\ \frac{0.6}{s + 1} + \frac{0.4}{s - 4} \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} -0.6e^{-t} + 0.6e^{4t} \\ 0.6e^{-t} + 0.4e^{4t} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Ha a második képletet alkalmaztam volna: $e^{At} = Se^{Dt}S^{-1}$, akkor nem kellett volna parciális törtekre bontani, azonban sajátvektorokat kell számolni (időnként ez egyszerűbb).

Matlab 2. $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ megoldása szimbolikus toolboxal**eig, syms, expand, pretty, diag**

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \text{ megoldása } x(t) = e^{At}x_0, \quad e^{At} = Se^{Dt}S^{-1} \text{ képlettel} \quad (25)$$

```

syms t real

A = [2 3 ; 2 1];
x0 = [0;1];

[S,D] = eig(A);

SDS_A_iszero = S * D / S - A

exp_Dt = diag(exp(diag(D)*t));
fprintf('\nexp(Dt) = \n\n')
pretty(exp_Dt)

exp_At = expand(S * exp_Dt / S);
fprintf('\n[Matlabbal számolt sajátvektorok] \nexp(At) = \n\n'), pretty(exp_At)

xt = exp_At * x0;
fprintf('\nA differencialegyenlet megoldasa: x(t) = \n\n')
pretty(expand(xt))

```

Eredmény:

```

exp(Dt) =

/ exp(4 t),    0    \
|              |
\    0,    exp(-t) /

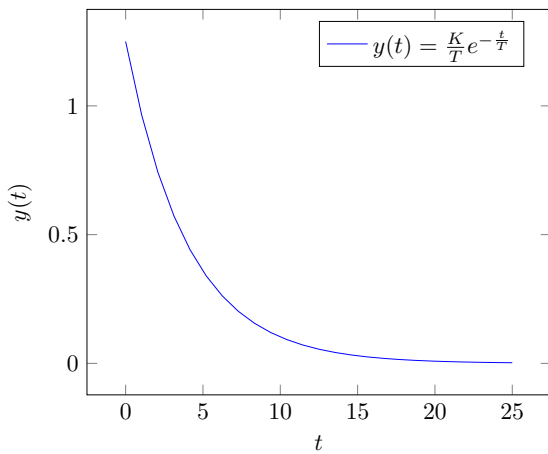
[Matlabbal számolt sajátvektorok]
exp(At) =

/ 2 exp(-t)    exp(4 t) 3    exp(4 t) 3    3 exp(-t) \
| ----- + -----, ----- - ----- |
|      5          5          5          5          |
| exp(4 t) 2    2 exp(-t) 3 exp(-t)    exp(4 t) 2 |
| -----, ----- + ----- |
\      5          5          5          5          /

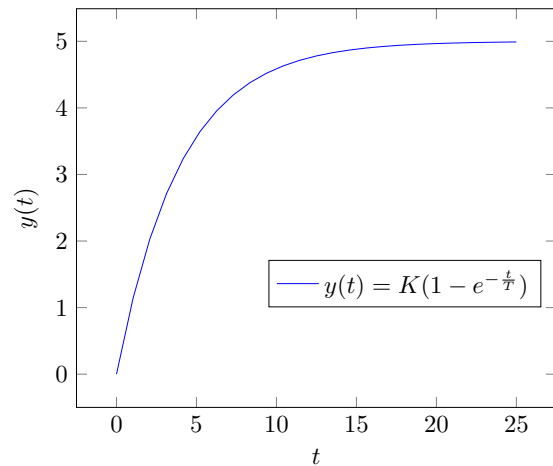
A differencialegyenlet megoldasa: x(t) =

/ exp(4 t) 3    3 exp(-t) \
| ----- - ----- |
|      5          5          |
| 3 exp(-t)    exp(4 t) 2 |
| ----- + ----- |
\      5          5          /

```

(a) Rendszerválasz a Dirac impulzus bemenetre



(b) Rendszerválasz az egységugrás bemenetre

1. ábra. Egytárolós rendszer válasza

Example 5. Laplace transzformáció alkalmazása átviteli függvény és rendszerválasz számítására

A rendszert leíró differenciálegyenlet: $T\dot{y} + y = Ku(t)$ $y(0) = 0$

Határozzuk meg a rendszer válaszát az alábbi esetekben:

1. $u(t) = \delta(t)$
2. $u(t) = 1(t)$

A rendszer Laplace transzformáltja: $TsY(s) + Y(s) = KU(s)$, ahol $T \in \mathbb{R}$ és $K \in \mathbb{R}$ rendszerfüggő paraméterek. Az átviteli függvény:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + Ts} \quad (26)$$

A rendszer válasza: $Y(s) = \frac{K}{1 + Ts}U(s)$

1. impulzusválasz

$$u(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathfrak{L}} U(s) = 1$$

$$Y(s) = K \frac{1}{1 + Ts} \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}} y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{K}{T} \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right\} = \frac{K}{T} e^{-t/T}$$

2. átmeneti függvény (egységugrásra adott válasz)

$$u(t) = 1(t) \xrightarrow{\mathfrak{L}} U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = K \frac{1}{s(1 + Ts)} \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}}$$

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{K}{T} \cdot \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right\} = \frac{K}{T} \cdot (1(t) * e^{-\frac{t}{T}}) = K(1 - e^{-t/T})$$

$K = 5$ és $T = 4$ esetén a példa megoldásainak szemléltetése látható a fenti ábrán.

3. Állapotegyenlet megoldása

- Ha csak gerjesztése van ($x_0 = 0, u(t) \neq 0$) \rightarrow Laplace transzformáció alkalmazása
- Ha csak kezdeti feltétel van ($x_0 \neq 0, u(t) = 0$) $\rightarrow e^{At}x_0$, állapottrajektória
- Ha kezdeti feltétel is van, és gerjesztés is

Example 6. ÁTM megoldása – egységugrás bemenetre

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad 1) \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u(t) = 1(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{27}$$

Laplace transzformáció alkalmazása:

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \rightarrow sX(s) - AX(s) = BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= BU(s) \rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}BU(s) \\ H(s) = Y(s)/U(s) &= C(sI - A)^{-1}B = \frac{s}{s^2 - 3s - 4} = \frac{s}{(s+1)(s-4)} \\ Y(s) = H(s)U(s) &= \frac{s}{(s+1)(s-4)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)(s-4)} = \frac{0.2}{s-4} - \frac{0.2}{s+1} \\ y(t) &= 0.2e^{4t} - 0.2e^{-t} \end{aligned}$$

Example 7. ÁTM megoldása – autonóm rendszerre

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad 1) \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u(t) = 0$$

Laplace transzformáció alkalmazása:

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= AX(s) \rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 \rightarrow x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x_0 = e^{At}x_0 \\ (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{(s+1)(s-4)} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & 3 \\ 2 & s-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Kimenet: } y(t) = Cx(t) = C \cdot \mathfrak{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \cdot x_0 = \mathfrak{L}^{-1}\{C(sI - A)^{-1}x_0\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s+1)(s-4)}\right\} = 0.6e^{-t} + 0.4e^{4t}$$

Example 8. ÁTM megoldása – sebességugrásra

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad 1) \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u(t) = t$$

Laplace transzformáció alkalmazása:

$$sX(s) - x_0 = X(s) + BU(s) \quad \rightarrow \quad X(s) = (sI - A)^{-1}(x_0 + BU(s)) \quad \rightarrow$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Ha $t_0 = 0$, akkor $e^{A(t-t_0)} = e^{At}$

$$e^{At} = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s^2-3s-4} & \frac{3}{s^2-3s-4} \\ \frac{s-1}{s^2-3s-4} & \frac{3}{s^2-3s-4} \end{pmatrix} \right\} = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{0.6}{s-4} + \frac{0.4}{s+1} & \frac{0.6}{s-4} - \frac{0.6}{s+1} \\ \frac{0.4}{s-4} - \frac{0.4}{s+1} & \frac{0.4}{s-4} + \frac{0.6}{s+1} \end{pmatrix} \right\}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 0.6e^{4t} + 0.4e^{-t} & 0.6e^{4t} - 0.6e^{-t} \\ 0.4e^{4t} - 0.4e^{-t} & 0.4e^{4t} + 0.6e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$e^{A(t-\tau)} = \begin{pmatrix} 0.6e^{4(t-\tau)} + 0.4e^{-(t-\tau)} & 0.6e^{4(t-\tau)} - 0.6e^{-(t-\tau)} \\ 0.4e^{4(t-\tau)} - 0.4e^{-(t-\tau)} & 0.4e^{4(t-\tau)} + 0.6e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix}$$

$$e^{A(t-\tau)}B = \begin{pmatrix} 1.2e^{4(t-\tau)} - 0.2e^{-(t-\tau)} \\ 0.8e^{4(t-\tau)} + 0.2e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} \rightarrow e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) = \begin{pmatrix} 1.2e^{4(t-\tau)}\tau - 0.2e^{-(t-\tau)}\tau \\ 0.8e^{4(t-\tau)}\tau + 0.2e^{-(t-\tau)}\tau \end{pmatrix}$$

Elemenkénti integrálás:

$$\int_0^t c_1 e^{c_2(t-\tau)}\tau d\tau = c_1 e^{c_2 t} \int_0^t e^{-c_2\tau}\tau d\tau = \frac{c_1}{c_2^2}(e^{c_2 t} - c_2 t - 1) \quad (\text{Parciális integrálás})$$

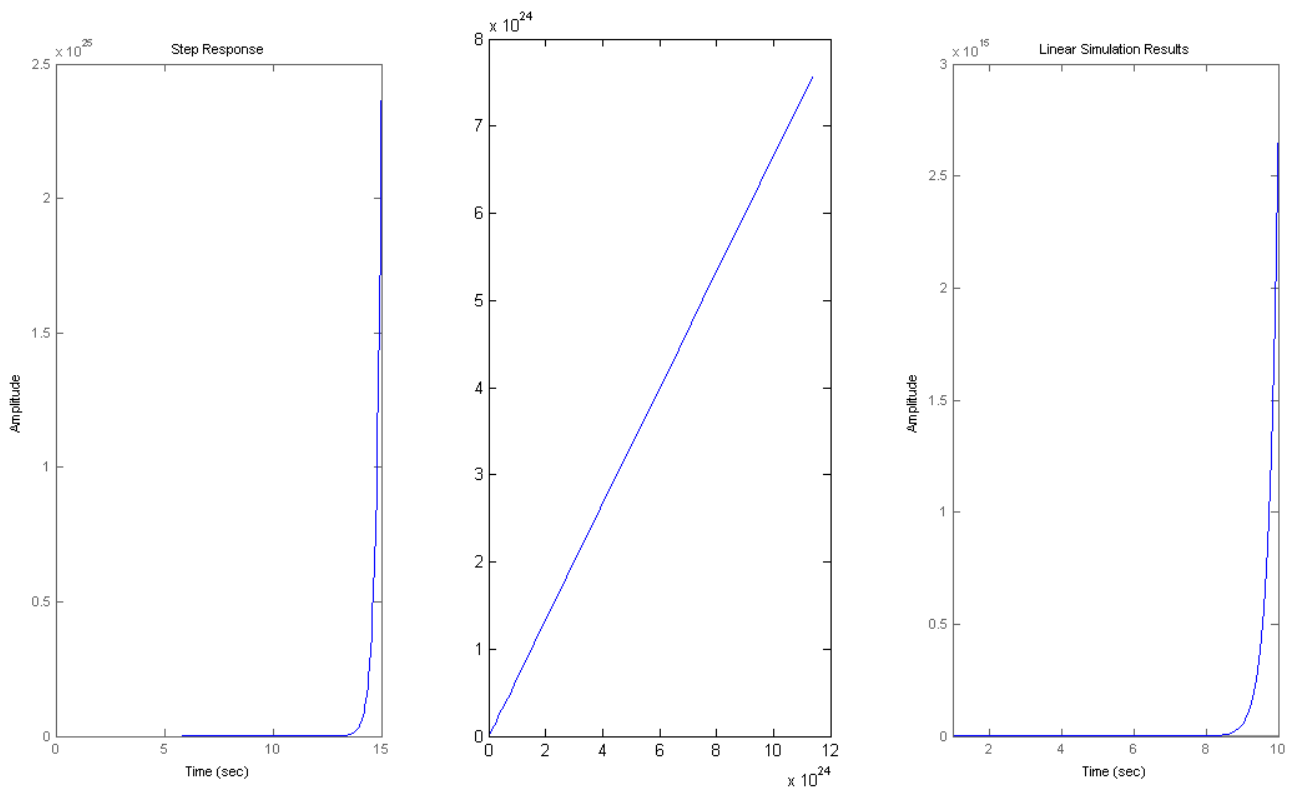
$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} 0.075e^{4t} - 0.2e^{-t} - 0.5t + 0.125 \\ 0.05e^{4t} + 0.2e^{-t} - 0.25 \end{pmatrix}$$

$e^{At}x_0$ értéke megegyezik a 2. példában szereplő értékkel, ezt alkalmazva

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0.675e^{4t} - 0.8e^{-t} - 0.5t + 0.125 \\ 0.45e^{4t} + 0.8e^{-t} - 0.25 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t) = 0.45e^{4t} + 0.8e^{-t} - 0.25$$

A 2. ábrán rendre a három példa megoldása látható.



2. ábra