Computer controlled systems

Lecture 1

version: 2017.09.26. – 16:28:51

1. Matematikai összefoglaló

1.1. Algebrai struktúrák

1. **Csoport** $(H, +)$ – H halmaz, és rajta egy művelet: $+$
   - asszociatív – $\forall a, b, c \in H \quad (a + b) + c = a + (b + c)$
   - $\exists$ egységelem/nullelem – $\exists 0 \in H\ \forall a \in H \quad a + 0 = a$
     a jobb és baloldali egység megegyezik, mivel $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$
   - $\forall$ elemnek $\exists$ ellentettje – $\forall a \in H\ \exists a^{-1} \in H \quad a + a^{-1} = 0$
     a jobb- és baloldali inverz megegyezik, mivel ha az
     $a \in H$ elemnek a_j^{-1} jobbinverze, a_b^{-1} balinverze, akkor
     $a_j^{-1} = 0 + a_j^{-1} = (a_b^{-1} + a) + a_j^{-1} = a_b^{-1} + (a + a_j^{-1}) = a_b^{-1} + 0 = a_b^{-1}$
2. **Abel csoport / kommutatív csoport** $(H, +)$
   $(H, +)$ csoport, továbbá
   - kommutatív – $\forall a, b \in H \quad a + b = b + a$
3. **Test** $K = (H, +, \cdot)$ – H halmazon két művelet, összeadás $+$ és szorzás $\cdot$
   - $(H, +)$ Abel csoport
   - $(H \backslash \{0\}, \cdot)$ Abel csoport
   - a szorzás az összeadásra nézve disztributív – $\forall a, b, c \in H \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. **Vektortér** – V vektorhalmaz K számtest felett
   (a) Összeadás $+ : V \times V \to V$, melyre nézve Abel csoportot alkot
   (b) Skalárral való szorzás $K \times V \to V$ – $\alpha \in K$, $\boldsymbol{v} \in V$, $\alpha \cdot \boldsymbol{v} \in V$
   - $\forall \boldsymbol{v} \in V$ és $\forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{v} = \alpha \cdot \boldsymbol{v} + \beta \cdot \boldsymbol{v}$ (disztr. skalárösszegre nézve)
   - $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ és $\forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha \cdot \boldsymbol{u} + \alpha \cdot \boldsymbol{v}$ (disztr. vektorösszegre nézve)
   - $\forall \boldsymbol{v} \in V$ és $\forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \cdot \beta)\boldsymbol{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{v})$
   - $1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, ahol $1 \in K$ a szorzás egységeleme

   Példák vektortérre:

   (a) $\mathbb{R}^n$
   (b) $K^{n \times k}$: K test feletti $n \times k$ mátrixok
   (c) $K[x]$: K test feletti polinomok
   (d) $K[x]$: ahol $\forall f \in K[x]$, $\deg(f) \leq n$
   (e) $C[0, 1]$: [0,1]-en értelmezett valós értékű folytonos függvények
   (f) $V = P(H)$: H véges halmaz összes részhalmazai által alkotott halmaz,
   $K = \{0, 1\}$ kételemű véges test
   $\forall A, B \in H$: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ és $0 \cdot A = \emptyset$, $1 \cdot A = A$

1.2. Homogén lineáris leképezés

V és W vektorterek K test felett
$\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés, ha $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ és $a \in K$ esetén

- $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$ (linearitás)
- $\mathcal{A}(a \cdot \boldsymbol{x}) = a \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ (homogenitás)

Példák lineáris transzformációra

- identitás és helybenhagyás
- differenciálás
- ellenpélda: $\mathcal{B}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(x) = x^2$

1.2.1. Lineáris leképezés mátrixa

Az $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés A mátrixa a V és W vektorterek rögzített bázisai mellett felírható úgy, hogy teljesül $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = A \cdot \boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{v} \in V$
A mátrix oszlopai a kiindulási tér bázisvektorainak képei a képtér bázisában felírva.
Example 1.

- $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ forgatás az origó körül $+90°$ fokkal
  Mindkét térben a kanonikus bázist $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ tekintve $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
  A kiindulási térben az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, a képtérben a $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}$ bázist tekintve $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{B}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tükrözés az x tengelyre
  Mindkét térben a kanonikus bázist tekintve $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
  A kiindulási térben a $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}$, a képtérben az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ bázist tekintve $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.3. Képtér, magtér

$\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés

- képtere $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{\boldsymbol{w} \in W \mid \exists \boldsymbol{v} \in V \ \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$
  azon vektorok W-ben, amelyek előállnak valamely V-beli vektor $\mathcal{A}$ leképezésnél vett képeként
- magtere $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$
  a W vektortér nullvektorába képződő vektorok

Example 2. Képtér, magtér kiszámítása

Legyen adott az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezést, melynek mátrixa a kanonikus bázisban felírva az alábbi. Határozzuk meg a leképezés képterét és magterét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A\boldsymbol{x} = 0 \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{Gauss elliminá ció - mind a képtér mind a magtér kiszámításához hasznos}} \tag{1}$$

- a képtér az A mátrix független oszlopai által kifeszített vektortér
- a magtér az $A\boldsymbol{x} = 0$ egyenletrendszer lineárisan független $\boldsymbol{x}_i$ megoldásvektorai által kifeszített vek-

tortér.

$$A\boldsymbol{x}_i = 0,\ \forall i = \overline{1,r},\ \text{ahol } r = \dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A}))$$
$$v = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{x}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_i = 0\ \ \forall i = \overline{1,r} \tag{2}$$

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathrm{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \left\{ p \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\} \tag{3}$$

Theorem 1. Dimenzió-tétel

Tetszőleges $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezés esetén teljesül: $\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A})) + \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A})) = \dim(V)$

Example 3. Lineáris egyenletrendszer általános megoldása

Adjuk meg $A\boldsymbol{x} = b$ lineáris egyenletrendszer *általános* megoldását.
Először határozzuk meg a $A\boldsymbol{x} = 0$ homogén egyenletrendszer általános megoldását:

$$\boldsymbol{x}_h \in \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \,\middle|\, \alpha_i \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n,\ i = \overline{1,k} \right\} = \mathrm{span}\langle \boldsymbol{v}_1, .., \boldsymbol{v}_k \rangle = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \tag{4}$$

Ezután kiszámoljuk (bármilyen módszerrel) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ inhomogén egyenletrendszer egyetlen speciális megoldását: $\boldsymbol{x}_{0,ih}$. Ekkor az inhomogén egyenletrendszer általános megoldása:

$$\boldsymbol{x}_{ih} \in \left\{ \boldsymbol{x}_{0,ih} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \,\middle|\, \alpha_i \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n,\ i = \overline{1,k} \right\} =: \text{"}\boldsymbol{x}_{0,ih} + \mathrm{Ker}(\mathcal{A})\text{"} \tag{5}$$

Matlab 1. null, orth, rank

Egy A mátrixával megadott lineáris leképzés magtere (nulltere) matlabban a következő képpen számolható ki:

```
>> A = [ 1 2 -1 ; 2 3 -1 ; -1 1 -2 ];
>> null(A)
ans =
   -0.5774
    0.5774
    0.5774
```

A leképzés képtere is könnyen kiszámítható az `orth` függvénnyel, azonban ez a függvény a képtér bázisvektorait ortogonalizálja:

```
>> orth(A)
ans =
   -0.5345   -0.0000
   -0.8018    0.3162
   -0.2673   -0.9487
```

Könnyen ellenőrizhető, hogy a képtérre kapott két bázisvektor egymásra merőleges.
Tekintve, hogy $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (vagyis a V megegyezik W-vel), $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3$, ezt Matlab-al így ellenőrizhetjük:

```
>> rank([null(A) orth(A)])
ans = 3
```

Vagyis a képtér és magtér bázisvektoraiból képzett mátrix teljes rangú.

1.4. Determináns, rang

2Kifejtési tételTetszőleges $A \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix determinánsa kiszámítható egy sora/oszlopa elemeinek a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánsokkal vett szorzatait összegezve. A determináns kifejtve az i. sora szerint: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$

ahol a_{ij} az A mátrix i. sornak j. eleme, D_{ij} a hozzá tartozó aldetermináns, melynek előjele a sakktábla szabály szerint $(-1)^{i+j}$.

Sarrus szabály: a 3×3-as determináns kiszámításának egyik gyors módszere

$$
\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}
$$

$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Egy mátrix **oszloprangja** az oszlopai közül kiválasztható maximális sok független oszlopvektor száma. A**sorrang** hasonlóan a mátrix sorai közül kiválasztható maximálisan sok független sorvektor száma. A **determinánsrang** pedig a sorok és oszlopok elhagyásával kapható legnagyobb négyzetes, $\neq 0$ determinánsú blokk sorainak száma.

- Tetszőleges A mátrix sorrangja, oszloprangja és determinánsrangja megegyezik, jele $\text{rank}(A)$
- Egy A mátrixot teljes oszloprangúnak nevezünk, ha $\text{rank}(A) =$ oszlopok száma, teljes sorrangúnak, ha $\text{rank}(A) =$ sorok száma.
- Egy A négyzetes mátrix teljes rangú (sor- és oszloprangú) $\iff \det(A) \neq 0$

1.5. Mátrix invertálás

Az $A \in T^{n \times n}$ mátrix **invertálható** $\quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$

Ha az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés mátrixa A és az A^{-1} mátrix létezik, akkor ez a mátrix az $\mathcal{A}^{-1}$ lineáris leképezés mátrixa, az egyes terekben az eredetivel megegyező bázisokra vonatkozóan.

Mátrix invertálása adjungált mátrix alkalmazásával: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$
ahol $\text{adj}(A)$ az a mátrix, amelyet úgy kapunk, hogy az A mátrix minden elemének helyére beírjuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánst, majd a kapott mátrixot transzponáljuk.

Speciálisan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ esetben:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{6}$$

Speciálisan $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ esetben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T \tag{7}$$

Example 4. (Inverz kiszámítása 2×2-es esetben)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 4 \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

1.6. Sajátérték, sajátvektor

$\mathcal{A} : V \to V$ (V egy K test feletti vektortér) lineáris leképezés
sajátvektora az $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, ha $\exists \lambda \in K \quad \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$
Ekkor az $\boldsymbol{x}$ vektort az $\mathcal{A}$ leképezés λ sajátértékhez tartozó sajátvektorának nevezzük.

A sajátértékek a leképezés mátrixából számolhatók. Nem számít, hogy milyen bázisokra vonatkozóan van felírva a mátrix, a sajátértékek mindig ugyanazok lesznek, mivel a sajátérték a leképezés tulajdonsága. A sajátvektorok is ugyanazok lesznek, azonban a kiindulási tér bázisában koordinátázva kapjuk ezeket.

$Ax = \lambda \boldsymbol{x} \quad \rightarrow \quad \lambda \boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad (\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer, melynek az $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ vektor a megoldása, tehát létezik nem triviális megoldás, mely azzal ekvivalens, hogy az együtthatómátrix oszlopai lineárisan összefüggőek, vagyis a determinánsa nulla.

Figyelem! A karakterisztikus polinom a Lineáris algebra tárgyból tanult alaktól eltérő, azonban azzal abszolútértékben megegyező, ezért azonos λ értékek esetén nulla. A most használt alaknál az A mátrixhoz képest a determinánsban nem csak a főátlóbeli elemek változnak, hanem a főátlóbeli elemek is, a (-1)-szeresükre.

- **Karakterisztikus polinom**: $\det(\lambda I - A)$
- A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei: $\det(\lambda I - A) = 0$
- A sajátvektorok a $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ lineáris egyenletrendszer megoldásai a megfelelő λ értékekre külön-külön számolva

Example 5.

Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \det\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 3) \tag{8}$$

A sajátértékek: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok számolása:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad -2x + 4y = 0 \quad \rightarrow \quad y = x/2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cdot p \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A $\lambda_2 = -3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok számolása:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad -4x = -2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot q \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Theorem 2. Cayley-Hamilton

Minden mátrix kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét. Speciálisan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ esetben:

$$\text{Karakterisztikus egyenlet: } \lambda^2 + \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A) = 0 \tag{9}$$

$$\text{Ennek következtében: } A^2 + A \operatorname{tr}(A) + I \det(A) = 0 \tag{10}$$

Example 6. Cayley-Hamilton

Legyen adott a következő mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2 \tag{11}$$

$$A^2 - 5 \cdot A - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

1.7. Bázistranszformáció, diagonalizálás

Egy vektortérben az éppen tekintett bázis határozza meg a vektorok koordinátamátrixát, ettől azonban néha el kell térni. Ez egy lineáris leképezés alkalmazásával valósítható meg, melynek mátrixát úgy kapjuk, hogy a mátrix oszlopaiba írjuk az új bázisvektorokat a régi bázis szerinti koordinátázva, majd a kapott mátrixon invertáljuk. A mátrix, és ezáltal a leképezés mindig invertálható, mivel bázist bázisba visz, melyeknek vektorai lineárisan függetlenek. Jelölje egy $\boldsymbol{x} \in V$ vector $[e]$ bázis szerinti koordináta mátrixát $x_{[e]}$, egy új $[v]$ bázis szerinti koordinátamátrixát pedig $x_{[v]}$. Legyen S mátrix, melynek oszlopaiban az új bázisvektorok találhatók $S = [\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n]$. Pontosabban fogalmazva, az S mátrix oszlopai az új bázisvektorok $[e]$ bázisban felírt koordináta mátrixai legyenek: $S = [v_{1[e]}, ..., v_{n[e]}]$. Ekkor

$$S^{-1} \cdot x_{[e]} = x_{[v]} \qquad S \cdot x_{[v]} = x_{[e]}$$

Tehát az S mátrix által leírt leképezés valójában az új bázisra vonatkozó koordinátázást a régire transzformálja, és az S^{-1} mátrix transzformál az új bázisba.

Example 7. (állapottér transzformációknál lesz fontos) Linalg „SAS-TAS” emlékeztető

Legyenek a következő vektorok $V = \mathbb{R}^2$ vektortérben ($[e] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ kanonikus bázisban felírva):

$$\boldsymbol{e_1}_{[e]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e_2}_{[e]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v_1}_{[e]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v_2}_{[e]} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{w_1}_{[e]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{w_2}_{[e]} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Ekkor $[e] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ a kanonikus bázisa $\mathbb{R}^2$-nek, $[v] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ és $[w] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ pedig nem kanonikus bázisai V-nek. Tekintsünk egy $\mathcal{A} : V \to W$, $\left(V = W = \mathbb{R}^2\right)$ lineáris leképzést, melynek mátrixa a kanonikus bázisból képezve kanonikus bázisba ($V_{[e]} \xrightarrow{A} W_{[e]}$):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

A kiindulási térben a kanonikus bázisból át szeretnénk térni $[v]$-re, a W képtérben (ahova $\mathcal{A}$ képez) pedig át szeretnénk térni $[w]$ bázisra. Definiáljuk a következő mátrixokat:

$$S := \left(\boldsymbol{v_1}_{[e]} \quad \boldsymbol{v_2}_{[e]}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$T := \left(\boldsymbol{w_1}_{[e]} \quad \boldsymbol{w_2}_{[e]}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

ekkor

$$\boldsymbol{v_i}_{[e]} = S\boldsymbol{e_i}_{[e]} \quad \text{illetve} \quad \boldsymbol{e_i}_{[e]} = S^{-1}\boldsymbol{v_i}_{[e]} \tag{17}$$

ugyanez $\boldsymbol{w}$-re is igaz. Ha adott egy $\boldsymbol{x} \in V$. Legyen ezen vektor koordináta mátrixa az $[e]$ kanonikus bázisban $\boldsymbol{x}_{[e]} = \binom{3}{0}$, vagyis

$$\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{e}_1 = \left(\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{[e]} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Ugyanakkor, ha a vektorok megegyeznek, akkor a koordinátamátrixuk is megegyezik, ezért a következőt is írhatom:

$$\boldsymbol{x}_{[e]} = 3\boldsymbol{e_1}_{[e]} = \left(\boldsymbol{e_1}_{[e]} \quad \boldsymbol{e_2}_{[e]}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Hasonlóképpen írjuk fel $\boldsymbol{x}$ vektort $[v]$ bázisban. Így induljunk el:

$$\boldsymbol{x}_{[e]} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = SS^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{v_1}_{[e]} \quad \boldsymbol{v_2}_{[e]}\right) S^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Ez azt jelenti, hogy a következő összefüggés áll fenn a vektorok között:

$$\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_2}\right) S^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_{[v]} = S^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Ha adott egy lineáris transzformáció: $\mathcal{A} : V \to W$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, akkor

$$\boxed{\begin{matrix} \boldsymbol{x}_{[e]} = S\boldsymbol{x}_{[v]} \\ \boldsymbol{x}_{[v]} = S^{-1}\boldsymbol{x}_{[e]} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \boldsymbol{y}_{[e]} = T\boldsymbol{y}_{[w]} \\ \boldsymbol{y}_{[w]} = T^{-1}\boldsymbol{y}_{[e]} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2\right) \cdot \boldsymbol{x}_{[e]} = \left(\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2\right) \cdot \boldsymbol{x}_{[v]} \\ \boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2\right) \cdot \boldsymbol{y}_{[e]} = \left(\boldsymbol{w}_1 \quad \boldsymbol{w}_2\right) \cdot \boldsymbol{y}_{[w]} \end{matrix}} \tag{22}$$

Az $\boldsymbol{x}_{[e]}$, $\boldsymbol{x}_{[v]}$, $\boldsymbol{y}_{[e]}$ és $\boldsymbol{y}_{[w]}$ koordinátamátrixokat nem is igazán illetné meg a vastagított vektorjelölés, ugyanis ezek függnek a bázisvektorok (azaz a koordinátarendszer) megválasztásától, az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektorok azonban a V és W vektorterek két jóldefiniált pontja/helyzetvektora, tehát a koordináta rendszer megválasztásától függetlenek. (Például, a térben az asztal sarka egy jóldefiniált pont, azonban ezen pont koordinátái a koordinátarendszer megválasztásának függvényében változnak.)

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y} \begin{array}{l} \nearrow \boldsymbol{y}_{[e]}=A\boldsymbol{x}_{[e]} \\ \searrow \boldsymbol{y}_{[w]}=\hat{A}\boldsymbol{x}_{[v]} \end{array} \qquad \begin{tikzcd} V_{[e]} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "S^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W_{[e]} \arrow[d, "T^{-1}"] \\ V_{[v]} \arrow[r, Rightarrow, "\hat{A}"'] & W_{[w]} \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{A}=T^{-1}AS} \tag{23}$$

Ellenőrzés:

$$\boldsymbol{y}_{[w]}=\hat{A}\boldsymbol{x}_{[v]}=T^{-1}A\underbrace{S\boldsymbol{x}_{[v]}}_{\boldsymbol{x}_{[e]}}=T^{-1}\underbrace{A\boldsymbol{x}_{[e]}}_{\boldsymbol{y}_{[e]}}=T^{-1}\boldsymbol{y}_{[e]}=\boldsymbol{y}_{[w]} \tag{24}$$

Egy $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció mátrixa diagonális, ha a sajátvektorok bázisára vonatkozóan írjuk fel. A sajátvektorok azonban nem minden esetben alkotnak bázist, ezért nem minden leképezés írható le diagonális mátrixszal.

Egy lineáris leképezés mátrixa diagonalizálható akkor és csak akkor, ha minden sajátértékére annak algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik.

- egy λ sajátérték algebrai multiplicitása k, ha λ k-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak.
- egy λ sajátérték geometriai multiplicitása k, ha a λ-hoz tartozó sajátaltér (λ-hoz tartozó sajátvektorok által alkotott altér) k dimenziós.

Example 8. $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3, & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \lambda_{1,2}=3,\ \lambda_3=-6$

A 3 sajátérték algebrai multiplicitása tehát 2, a 6 sajátértéké 1.

$\lambda_{1,2}=3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot p,\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot q \quad p,q\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lambda_3=-6$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot r \quad r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

A 3 sajátérték geometriai multiplicitása tehát 2, a 6 sajátértéké 1, mindkét sajátértékre a multiplicitások páronként megegyeznek, ezért a mátrix diagonalizálható. Ha a sajátvektorokat oszlopaiban tartalmazó mátrix S, akkor a leképezés diagonális mátrixa

$$D=S^{-1}\cdot A\cdot S \quad \to \quad A=S\cdot D\cdot S^{-1}$$

$$S=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad S^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \to \quad D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

1.8. Kvadratikus alak

A kvadratikus alakok $Q(\boldsymbol{x}): V \to T$ alakú leképezések, ahol V egy T test feletti vektortér. Mi speciálisan $Q(\boldsymbol{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezésekkel foglalkozunk. Általános alakja:

$$Q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

A kvadratikus alak felírható mátrixszorzat alakban is, ahol $a_{ij} = A_{ij}$ a mátrix megfelelő elemei. A mátrixszorzás definíciójából adódóan ez skalárszorzat alakban is írható.

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$$

A kvadratikus alakhoz tartozó mátrix nem egyértelmű. A főátlóbeli elemek egyértelműek, ezek az x_i^2 alakú tagok együtthatói, azon kívül azonban csak az $a_{ij} + a_{ji}$ összegek ismertek ($i \neq j$).

Példa:

$Q(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$ kvadratikus alak többféle mátrixszal leírható

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

A szimmetrikus mátrix egyértelműen tartozik a kvadratikus alakhoz, ezért ezt nevezzük a kvadratikus alak mátrixának (a példában A_2 mátrix).

Egy kvadratikus alak egy vektorhoz egy valós számot rendel. Ennek lehetséges előjele alapján osztályozzuk a kvadratikus alakokat, illetve ezzel ekvivalensen a szimmetrikus mátrixokat. (Később ezt sokszor fogjuk használni stabilitási vizsgálatok során.)
A $Q(x)$ kvadratikus alak, illetve az ezt leíró A szimmetrikus mátrix

- **pozitív definit**, ha $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \ > 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$
  Megjegyzés: minden kvadratikus alak a nullvektor esetén nulla értéket vesz fel, $\langle A \cdot \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0} \rangle = 0$
- **pozitív szemidefinit**, ha $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \ \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
  és $\exists \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, hogy $\langle A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$
- **negatív definit**, ha $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \ < 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$
- **negatív szemidefinit**, ha $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \ \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\exists \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, hogy $\langle A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$
- **indefinit**, ha pozitív és negatív értékeket egyaránt felvesz a kvadratikus alak.

A kvadratikus alakhoz tartozó A szimmetrikus mátrix λ_i sajátértékei valósak, melyekkel a fentiekkel ekvivalens feltételek fogalmazhatók meg. A $Q(\boldsymbol{x})$ kvadratikus alak

- pozitív definit $\Leftrightarrow$ $\forall i \ \lambda_i > 0$
- pozitív szemidefinit $\Leftrightarrow$ $\forall i \ \lambda_i \geq 0$ és $\exists j \ \lambda_j = 0$
- negatív definit $\Leftrightarrow$ $\forall i \ \lambda_i < 0$
- negatív szemidefinit $\Leftrightarrow$ $\forall i \ \lambda_i \leq 0$ és $\exists j \ \lambda_j = 0$
- indefinit $\Leftrightarrow$ $\exists i \ \lambda_i > 0$ és $\exists j \ \lambda_j < 0$

A kvadratikus alakot leíró mátrix is diagonalizálható. Mivel egy szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak, ha diagonalizálható, akkor ortonormált sajátbázis szerint is diagonalizálható. Amennyiben valamelyik sajátérték geometriai multiplicitása nem 1, és a számolás során nem ortogonális sajátvektorokat kaptunk, akkor valamilyen ortogonalizációs eljárással (pl. Gram-Schmidt ortogonalizáció) elérhető, hogy a sajátalteret ortogonális vektorok generálják. Emellett a vektorokat minden esetben normálni kell.
Ekkor ha S az ortonormált bázis vektorait tartalmazó mátrix, akkor $S^{-1} = S^T$

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1}$$

$$\boldsymbol{x}^T \cdot A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^T \cdot (S^T)^T) \cdot D \cdot (S^{-1} \cdot \boldsymbol{x}) = (S^T \cdot \boldsymbol{x})^T \cdot D(\cdot S^{-1} \cdot \boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{y} = S^{-1} \cdot \boldsymbol{x} = S^T \cdot \boldsymbol{x} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{x}^T \cdot A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T \cdot D \cdot \boldsymbol{y}$$

1.9. Mátrix Kalkulus

Az exponenciális függvény ($\exp(x) = e^x$) az alábbi hatványsorral definiálható.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{(Taylor sorfejtés)}$$

Elképzelhető, hogy egy fix paramétere is van a függvénynek, például: $a \in \mathbb{R}$ konstans, és t az idő változó

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^kt^k}{k!}$$

Az exponenciális függvényt kiterjeszthetjük mátrixokra (mátrix exponenciális), ekkor $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{6} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!}$$

Tulajdonságok:

- $e^{\mathbf{0}} = I$, ahol $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nullmátrix
- Ha $AB = BA$ akkor $e^Ae^B = e^{A+B}$. Általában nem igaz a képlet, mivel a mátrix szorzás nem kommutatív.
- $e^Ae^{-A} = I$
- $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
e^{At}e^{As} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^ks^k}{k!} \\
&= (I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{6} + ...)(I + As + \frac{A^2s^2}{2} + \frac{A^3s^3}{6} + ...) = \\
&= I + A(t+s) + \frac{1}{2}A^2(t^2 + 2ts + s^2) + \frac{1}{6}A^3(t^3 + 3ts^2 + 3t^2s + s^3) + ... \\
&= I + A(t+s) + \frac{1}{2}A^2(t+s)^2 + \frac{1}{6}A^3(t+s)^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t+s)^k}{k!}
\end{aligned}$$

- $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{At}) &= A + A^2t + \frac{1}{2}A^3t^2 + ... + \frac{1}{(k-1)!}A^kt^{k-1} \\
&= A(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + ...) = (I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + ...)A
\end{aligned}$$

Example 9.$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + ... = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e^B = I + B + \frac{B^2}{2!} + ... = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$e^Ae^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e^Be^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$e^{A+B} = I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2!} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3!} + ... = I \cdot (1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ...) + I' \cdot (1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + ...) =$

$= \begin{pmatrix} ch(1) & sh(1) \\ sh(1) & ch(1) \end{pmatrix}$

Proposition 3. tetszőleges diagonalizálható mátrix exponenciális függvénye

$$A = SDS^{-1} \Rightarrow e^A = Se^D S^{-1} = S \exp \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & .. & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1} = S \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, .., e^{\lambda_n}\right) S^{-1} \tag{25}$$

Proof (inkább csak levezetés).

$$A^k = SD^k S^{-1} \quad , \quad D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & .. & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, .., \lambda_n^k) \tag{26}$$

Teljes indukció:

$$A^k = A^{k-1}A = \left(SD^{k-1}S^{-1}\right)\left(SDS^{-1}\right) = SD^k S^{-1} \tag{27}$$

Ekkor a következőket csinálhatjuk:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = S \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} S^{-1} = S \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k, .., \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n^k\right) S^{-1} = S \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, .., e^{\lambda_n}\right) S^{-1} \tag{28}$$

Tehát, valóban $e^A = Se^D S^{-1}$. □

Matlab 2. Mátrixexponenciális kiszámítása – diagonalizáció ($A = SDS^{-1}$) eig,expm,diag

```
>> A = rand(3,3)
A =
    0.8147    0.9134    0.2785
    0.9058    0.6324    0.5469
    0.1270    0.0975    0.9575
>> [S,D] = eig(A)
S =
    0.6752   -0.7134   -0.5420
   -0.7375   -0.6727   -0.2587
   -0.0120   -0.1964    0.7996
```

```
D =
   -0.1879         0         0
         0    1.7527         0
         0         0    0.8399

>> expm(A)
ans =
    3.2881    2.2290    1.3802
    2.2617    2.8712    1.7128
    0.4615    0.3910    2.7554
```

```
>> S * expm(D) / S
ans =
    3.2881    2.2290    1.3802
    2.2617    2.8712    1.7128
    0.4615    0.3910    2.7554

>> S * diag(exp(diag(D))) / S
ans =
    (... ugyanaz )
```

1.10. Állandó Együtthatós Lineáris Differenciálegyenletek

A továbbiakban a vektorértékű változók, függvények (pl. $\boldsymbol{x}$) nem lesznek kiemelve.

A tárgy keretében főleg elsőrendű lineáris differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

1. Ha $A \in \mathbb{R}$ (skaláris eset), akkor a változók szétválasztásának módszerével meghatározható a megoldás.
   Megoldás: $x(t) = e^{At}x_0$, ahol $x_0 \in \mathbb{R}$ skalár

2. Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor szükséges az e^{At} mátrix kiszámítása.
   Megoldás: $x(t) = e^{At}x_0 \quad e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$
   Közelítés: $I + At + \frac{A^2t^2}{2} + ...$

Példa: Adott az alábbi csatolatlan differenciálegyenlet rendszer

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \end{aligned}$$

Amely átírható a következő alakra

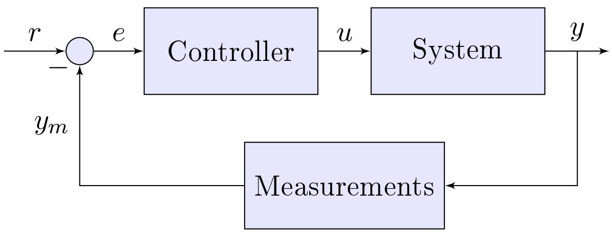
$$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mivel csak a diagonális elemek nem nullák, a rendszer csatolatlan, ezért a változók szétválasztásának módszerével a differenciálegyenlet megoldható.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{-t} \\ x_2(t) &= c_2 e^{2t} \end{aligned}$$

ahol $c_1 = x_{1_0}$ és $c_2 = x_{2_0}$

2. Általános Példák Szabályzott Rendszerekre



Rendszer: Olyan fizikai vagy logikai eszköz, amely jeleken végez valamilyen műveletet. (Bemenő jeleket dolgoz fel, és kimenő jeleket állít elő.)
Példa rendszerekre, és szabályozásra

- Autó sebessége: beavatkozás: gázpedál, érzékelés: sebességmérő, szabályozás: humán vagy tempomat
- Hűtőszekrény hőmérséklet: beavatkozás: hűtőközeg mozgatása - kompresszor, érzékelés: hőmérő, szabályozás: szabályozó automatika beállított hőmérséklet elérése érdekében
- További példák találhatóak az FSB könyv első fejezetében, lásd a tárgy honlapján!