CCS 2015 Pótzh gyakorlat

Gyakorlat - 16p

1.

$$H(s) = \frac{-5s-4}{s^2+s-2}$$

(a) Határozza meg a rendszer impulzusválaszát (súlyfüggvényét)(2p)!

Mo:

$$W(s) = \frac{-5s-4}{s^2+s-2} = \frac{-2}{s+2} + \frac{-3}{s-1} \quad \rightsquigarrow \quad h(t) = -2e^{-2t} - 3e^{t}$$

2. Legyen

$$H(s) = \frac{2s+5}{(2s+2)(s+4)(s+1)}$$

Adja meg egy tetszőleges állapottér reprezentációját $H(s)$-nek (2p)!

MO:

$$H(s) = \frac{2s+5}{2s^3+12s^2+18s+8} = \frac{s+2.5}{s^3+6s^2+9s+4}$$

Pl. Controller form:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -9 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1 \quad 2.5]$$

3. Milyen a esetén lesz az $L = ax_1^2x_2^2$ függvény az alábbi rendszer Ljapunov-függvénye a [0,0] egyensúlyi pontra nézve (1p)? (indoklás!)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 \end{aligned}$$

MO:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt} = [2ax_1x_2^2 \quad 2ax_1^2x_2] \begin{pmatrix} -x_1^3x_2^2 \\ -x_2^3 \end{pmatrix} = -2ax_1^4x_2^4 - 2ax_1^2x_2^4$$

$\rightsquigarrow \quad a > 0$

4. Legyen $f(t) = e^t$, $g(t) = sin(t)$

   Számolja ki f és g konvolúcióját (3p)!

   MO:

$$f \star g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^\tau sin(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^\tau (sin(t)cos(\tau) - cos(t)sin(\tau))d\tau =$$

$$sin(t)\int_0^t e^\tau cos(\tau) - cos(t)\int_0^t e^\tau sin(\tau)$$

$$= sin(t)\left[e^\tau \frac{sin(\tau)+cos(\tau)}{2}\right]_0^t - cos(t)\left[e^\tau \frac{sin(\tau)-cos(\tau)}{2}\right]_0^t$$

$$= sin(t)\left[e^t \frac{sin(t)+cos(t)}{2} - 1\frac{0+1}{2}\right] - cos(t)\left[e^t \frac{sin(t)-cos(t)}{2} - 1\frac{0-1}{2}\right]$$

$$= \frac{e^t}{2}(sin^2(t) + sin(t)cos(t) - sin(t)cos(t) + cos^2(t)) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2}$$

5. Legyen egy folytonos idejű rendszer állapotegyenlete $\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$ ahol

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$$

   Mi az az állapottranszformáció, mely a fenti modellt a

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{C} = [1 \qquad 0]$$

   modellbe transzformálja (2p) ?

   MO:

   Mivel $\exists\ M_c^{-1}$,

$$\bar{M}_c = TM_c \quad \rightsquigarrow T = \bar{M}_c M_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   $TAT^{-1} = \bar{A}$, $TB = \bar{B}$, $CT^{-1} = \bar{C}$

6. Adott a következő állapottér modell:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_3 - x_2 - x_1 + u \\ \dot{x}_3 &= x_2 \end{aligned}$$

   - Irányítható-e a rendszer (1p)?

- Létezik-e olyan u bemenet ami a rendszert véges időn belül az $x_1 = [0 \quad -2 \quad 0]^T$ állapotból az $x_2 = [4 \;\; 0 \;\; 2]^T$ állapotba juttatja? (1p)
- Létezik-e olyan u bemenet ami a rendszert véges időn belül az $x_3 = [0 \; 0 \; 0]$ állapotból az $x_3 = [-4 \;\; 0 \;\; 0]^T$ állapotba juttatja? (1p)

MO:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A^2B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

- Nem ($\det \mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B] = 0$)
- Igen, x_1 és x_2 is az irányíthatósági altérben vannak ($x_1 = -2B$, $x_2 = 2(B + AB)$)
- Nem, x_3 az irányíthatósági altérben van, de x_4 nincs az irányíthatósági altérben. Ha a rendszer az irányíthatósági altérből indul, ott is marad.

7. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad C = (0 \quad 1)$$

Tervezzen állapotmegfigyelőt a rendszerhez, úgy hogy a megfigyelő karakterisztikus egyenlete legyen $\phi_o = (s+4)(s+1)$! (3p)

MO:

A fiktív rendszer:

$$A_2 = A^T \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_2 = C^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = [0 \;\; 1]\mathcal{C}_2^{-1}\phi(A) = [-3 \quad 7]$$

ahol

$$\mathcal{C}_2 = [B_2 \;\; A_2B_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathcal{C}_2^{-1} = [B_2 \;\; A_2B_2]^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_o(s) = (s+4)(s+1) = s^2 + 5s + 4 \rightsquigarrow \phi(A) = A_2^2 + 5A_2 + 4I = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -21 & 31 \end{pmatrix}$$

$\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + Ly + Hu$

ahol

$L = K_2^T = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad F = A - LC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \qquad H = B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$