Név: ....

Pontszám: ....

FUNKCIONÁLANALÍZIS 2. ZH.

2017. május 11.

Munkaidő: 60 perc

A FELADATOKAT FIGYELMESEN OLVASSA EL!

1. *(4 pont)* Tetszőleges H Hilbert térben legyen $x, y \epsilon H$ két olyan elem, melyekre teljesül a $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$ összefüggés. Igazoljuk, hogy a két elem ortogonális, azaz $x \perp y$.

2. *(10 pont)* Jelölje ℓ^2-ben az i-dik egységelemét e_i, ennek egyetlen nem nulla eleme az i-dik helyen álló 1. Legyen $g_i = e_i + e_{i+1}$. Igazolja, hogy az (g_n) elemekből álló rendszer:

   (a) –lineárisan független,

   (b) –de nem ortogonális.

   (c) (*Bónusz kérdés, +5 pont*): Teljes-e ez a rendszer? Miért?

3. *(10 pont)* Tekintsük az alábbi függvényteret:

$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \quad \text{korlátos, folytonos függvény}\},$$

   és a térben $\|f\| = \sup\{|f(x)| \ : \ x \epsilon \mathbb{R}\}$ a szokásos sup-norma.

   Tekintsük azt a $T : X \to X$ operátort, melyre

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2} f(-2x).$$

   Igazoljuk, hogy T korlátos és lineáris. Határozzuk meg normáját.

4. *(10 pont)* Tekintsük azt a $T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ korlátos lineáris operátort, melyet az alábbi mátrix definiál:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   $Tx = A \cdot x$, ahol $a \epsilon \mathbb{R}$ egy paraméter. Határozzuk meg T normáját.

5. *(15 pont)* Legyen $T : \mathcal{L}^2[0,1] \to \mathcal{L}^2[0,1]$ a következő operátor:

$$(Tf)(x) = xf(x).$$

   (a) Igazoljuk, hogy T korlátos.

   (b) $\|T\| =?$

   (c) Határozzuk meg T spektrumát, $\sigma(T) =?$

6. *(Bonus+8 pont)* A *Rademacher rendszer* egy ON függvényrendszer $\mathcal{L}^2[0,1]$-ben, mely n-dik függvénye:

$$r_n(x) = \operatorname{sgn}\big(\sin(2^n \pi \cdot x)\big).$$

   (a) Írjuk fel az $r_n(x)$ függvényeket $n = 0, 1, 2$ esetben.

   (b) Igazoljuk, hogy r_0 és r_2 ortogonálisak $[0,1]$-ben.

Jó munkát!