Név: ....

Pontszám: ....

FUNKCIONÁLANALÍZIS 2. ZH.

2017. május 11.

Munkaidő: 60 perc

A FELADATOKAT FIGYELMESEN OLVASSA EL!

1. (*"Fordított" Pithagorasz tétel*) *(4 pont)* Legyen $f, g \epsilon \mathcal{L}^2([-1,1])$ két olyan függvény, melyekre $\|f\|^2 + \|g\|^2 = \|f+g\|^2$. Igazoljuk, hogy $f \perp g$.

2. *(10 pont)* Jelölje ℓ^2-ben az i-dik egységelemét e_i, ennek egyetlen nem nulla eleme az i-dik helyen álló 1. Legyen $f_i = e_i - e_{i+1}$. Igazolja, hogy az (f_n) elemekből álló rendszer

   (a) lineárisan független,

   (b) de nem ortogonális.

   (c) (*Bónusz kérdés, +5 pont*): Teljes-e ez a rendszer? Miért?

3. *(10 pont)* Tekintsük az alábbi függvényteret:

$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \ \pi \text{ szerint periodikus, folytonos } \},$$

és a térben $\|f\| = \sup\{|f(x)| \ : \ x \epsilon \mathbb{R}\}$ a szokásos sup-norma.
Határozzuk meg a $T : X \to X$ operátor normáját:

$$(Tf)(x) = 2f(x+2).$$

4. *(10 pont)* Tekintsük azt a $T : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ korlátos lineáris operátort, melyet az alábbi mátrix definiál:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$Tx = A \cdot x$. Határozzuk meg T normáját.

5. *(15 pont)* Tekintsük az alábbi $T \epsilon B(\ell^2)$ operátort:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(-\frac{x_1}{2},\ \frac{x_2}{2^2},\ -\frac{x_3}{2^3},\ \dots, (-1)^n \frac{x_n}{2^n}, \dots\right).$$

(a) Igazoljuk, hogy T korlátos.

(b) $\|T\| =$?

(c) Határozzuk meg T spektrumát, $\sigma(T) =$? A spektrum mely pontjai sajátértékek is egyben?

Jó munkát!