Név: ....

Pontszám: ....

FUNKCIONÁLANALÍZIS
2. ZH. Javítás
2013. május 31.

Munkaidő: 60 perc
Válaszait indokolja.

1. *(10 pont)* A $H = \mathcal{L}^2[0,1]$ Hilbert térben tekintsük az alábbi H_0 alteret:
$$H_0 = \{f \epsilon \mathcal{L}^2[0,1] \ : \ \int_0^1 f(x)dx = 0\}.$$
Legyen P a H_0 altérre vett projekció. Igazoljuk, hogy P önadjungált.

2. *(10 pont)* Legyen $X = \mathbb{R}^2$, ezen vegyük a Euklideszi normát:
$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$
Határozzuk meg az X^* duális teret.
(Levezetéssel együtt kérjük, végeredmény önmagában nem elég.)

3. Tekintsük a $H = \ell^2$ Hilbert térben az alábbi operátort:
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, ...) = (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, 0, \dots, 0, \dots),$$
tehát az első 3 páratlan indexű és az azt követő páros indexű tagokat felcseréljük, a többit pedig lenullázzuk.
   (a) *(8 pont)* $\|T\| =?$
   (b) *(7 pont)* Határozzuk meg T spektrumát.
   (c) *(8 pont)* Igazoljuk, hogy T önadjungált.

4. *(10 pont)* Legyen $f[0,1] \to \mathbb{R}$ a Dirichlet függvény:
$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ rac.} \\ 1, & x \text{ irrac} \end{cases}$$
Mi lesz a megfelelő T_f általánosított függvény (azaz disztribúció) deriváltja?
(*+2 pont*: Mi lesz a gyenge derivált?)

5. *(15 pont) (+2 pont ellenőrzés)* Adja meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását a szukcesszív approximáció segítségével.
$$y' = y + 1, \qquad y(0) = 0.$$

Jó munkát!