Név: ....

Pontszám: ....

FUNKCIONÁLANALÍZIS

2. ZH. Javítás

2012. május 23.

Munkaidő: 50 perc

Válaszait indokolja.

1. Legyen (φ_n) egy teljes ON rendszer valamely H Hilbert térben. Ha $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$, akkor a T operátor rendelje hozzá az alábbi elemet:
$$Tf := \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}\varphi_{2n}.$$
Igazoljuk, hogy a $T : H \to H$ operátor
   (a) $T \epsilon \mathcal{B}(H)$. *(2 pont)*
   (b) $\|T\| = 1$. *(5 pont)*
   (c) T projekció (azaz $T^2 = T$). *(3 pont)*
   (d) Spektruma $\sigma(T) = \{0, 1\}$. *(8 pont)*
2. Legyen $H = L^2[0,1]$ Hilbert tér. Definiáljuk az alábbi korlátos lineáris operátort: $Tf := \alpha \cdot f$, ahol $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ rögzített szám.
   (a) Mi lesz T adjungáltja, $T^* =?$ *(6 pont)*
   (b) Határozzuk meg T spektrumát. *(10 pont)*
3. Legyen $X = \mathbb{R}^2$ és $Y = \mathbb{R}^3$, mindkettőben a $\|\cdot\|_\infty$ normát tekintjük. Ha $T \epsilon \mathcal{B}(X, Y)$, akkor van egy olyan A mátrix, melyre $T : x \mapsto Ax$. Határozzuk meg ennek normáját. *(8 pont)*
4. A ℓ^1 normált térben tekintsük az alábbi funkcionált:
$$T : \ell^1 \to \mathbb{R}, \qquad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad \text{ha} \quad x = (x_n),$$
ahol $a_n = \dfrac{1}{n}$. Mennyi $\|T\|$? *(10 pont)*

Jó munkát!