Név: ....

Pontszám: ....

FUNKCIONÁLANALÍZIS
2. ZH.

2012. május 9.

Munkaidő: 50 perc

1. Legyen H egy Hilbert tér, benne (e_n) egy teljes ON rendszer. $N \epsilon \mathbb{N}$ egy rögzített természtes szám. Az $A : H \to H$ operátort a következőképpen definiáljuk:

$$\text{ha} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} x_i e_i, \qquad \text{akkor} \quad Ax := \sum_{n=1}^{N} x_i e_i.$$

   Igazoljuk, hogy

   (a) *(2 pont)* $A \epsilon \mathcal{B}(H)$.

   (b) *(5 pont)* $\|A\| = 1$.

   (c) *(3 pont)* A projekció (azaz altérre vetítés, illetve $A^2 = A$).

   (d) *(8 pont)* Spektruma $\sigma(A) = \{0, 1\}$.

   Válaszait indokolja.

2. Legyen $H = L^2[0,1]$ Hilbert tér. Definiáljuk az alábbi korlátos lineáris operátort:

$$T : f \mapsto Tf, \qquad Tf(s) := s \cdot f(s).$$

   (a) *(6 pont)* $\|T\| =?$

   (b) *(6 pont)* Igazoljuk, hogy T önadjungált.

3. *(8 pont)* Legyen $X = \mathbb{R}^3$ és $Y = \mathbb{R}^2$, mindkettőben az $\| \ \|_1$ normát tekintjük. Ha $T \epsilon \mathcal{B}(X, Y)$, akkor van egy olyan A mátrix, melyre $T : x \mapsto Ax$. Határozzuk meg ennek normáját.

4. *(6 pont)* Határozzuk meg T spektrumát, ha $T \epsilon B(\ell^2)$ az alábbi operátor:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, \dots \right).$$

   A spektrum mely pontjai sajátértékek is egyben?

5. *(8 pont)* A H Hilbert térben egy (x_n) sorozat gyengén konvergál valamely x_0 ponthoz. Igazolja, hogy ekkor

$$\forall y \epsilon H : \qquad \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x_0, y \rangle.$$