Név: ....

Pontszám: ....

FUNKCIONÁLANALIZIS

2. ZH.

2010. december 7.

Munkaidő: 60 perc

1. *(4 pont)* Legyen $H = \mathbb{R}^2$ Hilbert tér és tekintsük az alábbi lineáris operátort (lényegében a komplex konjugálás):

$$T(x, y) = (x, -y),$$

Határozza meg az operátor normáját.

2. *(8 pont)* $H = \mathcal{L}^2[a, b]$ és $k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ adott kétváltozós folytonos függvény. Legyen

$$T : u \mapsto Tu, \qquad (Tu)(s) = \int_a^b k(s, t)u(t)dt, \qquad s\epsilon[a, b].$$

Írja fel T adjungáltját.

3. *(10 pont)* Jelölje ℓ^2 i-dik egységelemét e_i, ennek egyetlen nem nulla eleme az i-dik helyen álló 1. Legyen $f_i = e_i - e_{i+1} + e_{i+2}$. Igazolja, hogy az (f_i) elemek

   – lineárisan függetlenek,

   – ortogonálisak!

   (+Kérdés *(+5 pont)*: vajon teljes-e ez a rendszer?)

4. *(10 pont)* Legyen $T \epsilon B(\ell^2)$:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(\frac{1}{2}x_1,\ \frac{2}{3}x_2,\ \frac{3}{4}x_3,\ \dots,\ \frac{n}{n+1}x_n,\ \dots\right).$$

   – Határozza meg a sajátértékeit.

   – Határozza meg spektrumát.

5. *(8 pont)* Adja meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását a szukcesszív approximáció segítségével.

$$y' = y - 1, \qquad y(0) = 0$$