Név: ....

Pontszám: ....

FUNKCIONÁLANALÍZIS 1. ZH. Javítás

2017. május 25.

Munkaidő: 60 perc

Válaszait indokolja!

1. *(15 pont)* Metrikát definiálnak-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi függvények?

$$d_a(x,y) = \max(|x_1 - 2y_1|, |x_2 - 2y_2|), \qquad d_b(x,y) = \min(|x_1 - 2y_1|, |x_2 - 2y_2|)$$

   Metrika esetén további kérdések:

   (a) Mennyi a távolsága az $(-1,1)$ és $(0,-1)$ pontoknak?

   (b) Vázolja fel az origó közepű egység sugarú kört az adott metrika mellett.

   (c) Adja meg azt a normát, amiből származtatható a metrika.

+ (Bonus *5 pont*) A fenti feladatban metrika esetén teljes-e $\mathbb{R}^2$ az adott metrikával?

2. *(15 pont)* Tekinsük az ℓ^1 teret a szokásos normával. Ebben a térben legyen R egy részhalmaz, melyet így adunk meg:

$$R = \{x = (x_n) \ : \ \exists N \text{ melyre } x_M = 0 \text{ ha } M > N\}.$$

   (a) Igazoljuk, hogy R nem zárt halmaz.

   (b) Igazoljuk, hogy R nem zárt korlátos.

   (c) R sűrű-e ℓ^1-ben?

3. *(12 pont)* Legyen $R = [0,2]$. Az $L^p(R)$ függvénytérhez tartoznak-e $p = 1, \infty$ esetén az alábbi függvények:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad g(x) = \sqrt{x}, \qquad h(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & x = \dfrac{2}{n},\ n\epsilon\mathbb{N}, \\ 0, & x \neq \dfrac{2}{n},\ n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}.$$

   Számolja ki a függvények L^∞ normáját, ahol értelmezett.

4. *(8 pont)* Legyen $R = [0,1]$.

   (a) Igazolja, hogy $L^\infty(R) \subset L^1(R)$, és hogy a tartalmazás valódi.

   (b) Igazolja, hogy ha $f\epsilon L^1(R)$, akkor

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty.$$

+1 *(Bonus +6 pont)* Legyen

$$X = \{\frac{p}{q} \ : \ p < q, \ p, q \epsilon \mathbb{N}$$

és $\mathcal{R} = 2^X$. Definiáljuk az $(X, \mathcal{R})$ mérhető téren az alábbi mértéket:

$$\mu(A) = \sum_{x \epsilon A} x, \qquad \text{ha } A \subset X.$$

(a) Legyen $B = \{x = \dfrac{1}{3^k} \ : \ k \epsilon \mathbb{N}\}$. Mennyi $\mu(B) =?$

(b) Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény mérhetősége mit jelent?

(c) Hogyan értelmezhető az $\displaystyle\int_B f \, d\mu$ integrál?

Jó munkát!