Név: .... Csoport: H – P+SzB – P+PP

Pontszám: ....

FUNKCIONÁLANALÍZIS 1. ZH.

2017. március 30.

Munkaidő: 60 perc

Válaszait indokolja.

1. *(15 pont)* Normát definiálnak-e $\mathbb{R}^2$-en az alábbi függvények? Igazolja.

$$\|(x,y)\|_a = \sqrt{x^2+9y^2}, \qquad \|(x,y)\|_b = \sqrt{x^3+9y^3}, \qquad (x,y)\epsilon\mathbb{R}^2.$$

   Norma esetén további kérdések:

   (a) Milyen metrikát indukál? Mennyi a távolsága az $(-1,1)$ és $(0,-1)$ pontoknak?

   (b) Vázolja fel az origó közepű egység sugarú kört az adott norma mellett.

   (c) Adja meg azt a skalárszorzatot, amiből származtatható a norma.

2. (a) *(6 pont)* Tekintsük az $x=(x_n)$ sorozatot, ahol $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+300}}$. Az ℓ^1, ℓ^5 és ℓ^∞ sorozatterek közül melyikben van benne?

   (b) *(6 pont)* Igazolja, hogy a sorozatterek közt az alábbi összefüggés teljesül (valódi tartalmazással): $\ell^1 \subset \ell^\infty$.

3. *(11 pont)* Tekinsük a $C[0,1]$ teret a maximum-normával. Ebben a térben legyen P egy részhalmaz, melyet így adunk meg:

$$P = \{p : [0,1] \to \mathbb{R},\ \text{polinom}\}.$$

   (a) P korlátos?

   (b) P kompakt?

   (c) P sűrű-e $C[0,1]$-ben?

4. *(12 pont)* Legyen $R=[1,\infty)$. Az $L^p(R)$ függvénytérhez tartoznak-e $p=1,\infty$ esetén az alábbi függvények:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = x^2, \qquad h(x) = \begin{cases} n, & x = n\epsilon\mathbb{N}, \\ \\ 0, & x\not\epsilon\mathbb{N} \end{cases}.$$

   Számolja ki a függvények L^∞ normáját, ahol értelmezett.
   (Vigyázat, a h függvény becsapós lehet. Javaslom a függvényekhez ábra készítését.)

+1 *(Bonus +6 pont)* Legyen $X = \mathbb{N}$ és $\mathcal{R} = 2^{\mathbb{N}}$. Definiáljuk az $(X, \mathcal{R})$ mérhető téren az alábbi mértéket:

$$\mu(A) = \sum_{k \epsilon A} \frac{1}{2^k}, \qquad \text{ha } A \subset \mathbb{N}.$$

(a) Legyen $B = \{$ *páros számok* $\}$. Mennyi $\mu(B) =$?

(b) Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény mérhetősége mit jelent?

(c) Hogyan értelmezhető az $\displaystyle\int_X f\, d\mu$ integrál?

(d) Adjon meg olyan $f, g : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvényeket, melyekre $f \epsilon L^2(X)$ és $g \notin L^2(X)$.

Jó munkát!