Név: ....

Pontszám: ....

FUNKCIONÁLANALÍZIS
1. ZH.

2013. április 10.

Munkaidő: 60 perc

1. *(12 pont)* (M, d) metrikus tér. Ebben adott egy $K \subset M$ halmaz, mely véges sok elemből áll. Igazoljuk, hogy K zárt.

2. *(12+5+12 pont)* Tekintsük az alábbi sorozat teret:
$$H = \{(x_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2(1+n^2) < \infty\}.$$
   (a) Igazoljuk, hogy ezen a téren skalárszorzat lesz: $\langle x, y\rangle_H := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n (1+n^2)$.
   (b) Igazoljuk, hogy $H \subset \ell^2$.
   (c) Igazoljuk, hogy a fenti skalárszorzattal indukált normára: $\|x\|_H \geq \|x\|_2$, ha $x \epsilon H$.

3. *(18 pont)* Az $X = \mathbb{N}$ alaphalmazon tekintsük az $\mathcal{R} = 2^{\mathbb{N}}$ σ-algebrát. Adottak a $p_i > 0$ számok, $i = 1, 2, ...$, melyekre $\sum p_i = 1$. Egy $A \subset \mathbb{N}$ halmaz mértékét így értelmezzük:
$$\mu(A) := \sum_{i \epsilon A} p_i, \qquad .$$
   (a) Melyek lesznek a null-mértékű halmazok? Mikor teljesül, hogy $\mu(A) = 0$?
   (b) Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény μ mérték szerinti integrálját az egész téren hogyan számoljuk? $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = ?$

   +Kérdés (+2 pont): Vajon hol találkoztak már a fenti feladattal eddigi tanulmányaikban? (Valahol már - igen! - találkoztak vele.)

4. *(16 pont)* Az $L^p(0, 1)$ függvénytérhez tartoznak-e $p = 3$ és $p = \infty$-re az alábbi függvények:
   (a) $f(x) = \chi_C$, ahol $C \subset [0, 1]$ a Cantor halmaz?
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$?

Válaszait indokolja.

Jó munkát!