2. Differenciálgeometria (anal3)

Szorgalmi házi feladatok + Matlab

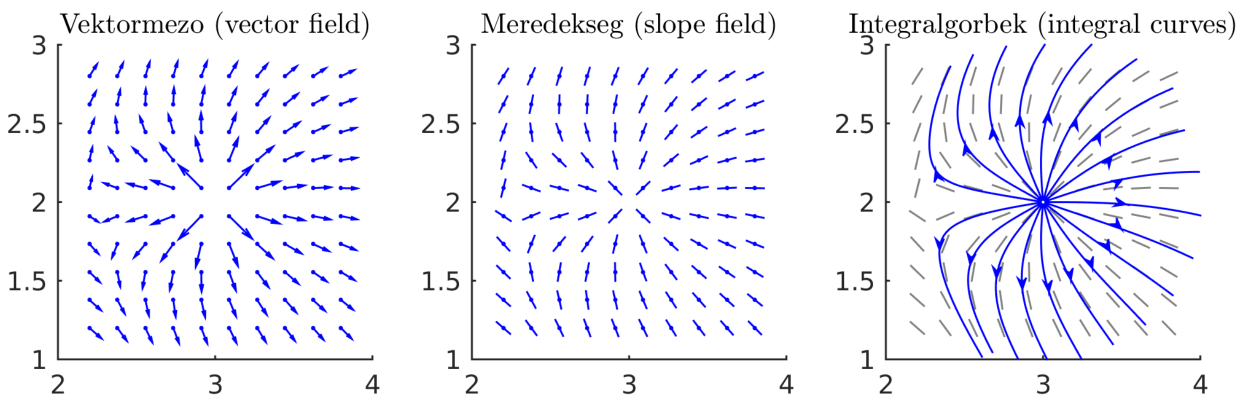
verzió: 2018.10.24. – 16:41:24

Contents

1 Integrálgörbék (integral curves)

Jelölje $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a folyó felületén mért áramlási sebességet adott (x, y) pontban. Az integrálgörbék a $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t))$ közönséges differenciálegyenlet megoldásai különböző $\boldsymbol{\gamma}(0) = (x_0, y_0)$ kezdeti feltételek mellett, azaz

$$\text{ha } \boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}, \text{ akkor } \begin{cases} \dot{x}_1(t) = F_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}_1(t) = F_2(x(t), y(t)) \end{cases} \tag{1}$$



1. állítás (integrálgörbék invarianciája)**.**egyen $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektormező és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ szigorúan pozitív értékű skalármező. Illetve legyen $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})$. Ekkor ha $\Gamma = \{\boldsymbol{\gamma}(t) \mid t \in [a, b]\}$ integrálgörbéje $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$-nak, akkor $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$-nak is integrálgörbéje (és fordítva). *Költői kérdés: ez miért hasznos nekünk?*

1. feladat. Bizonyítsuk be az állítást!

2. feladat (Görbe kanonikus paraméterezése)**.**

3. feladat (Ekvidisztáns pontok egy görbén)**.**

2 Koordinátafüggetlen deriváltak (csak a legbátrabbaknak)

2.1 Alapfogalmak

Descartes koordináta rendszerben bármilyen $\boldsymbol{v}$ (koordinátafüggetlen) vektor felírható $\boldsymbol{i}$ és $\boldsymbol{j}$ lineáris kombinációjaként:

$$\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{i} + v^2\boldsymbol{j}\ ,\quad \text{ezt jelöltük mi eddig úgy, hogy } „\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}" \tag{2}$$

Fogalmak, jelölések:

- $\boldsymbol{R}$: a tér egy adott ponja, NEM FÜGG a koordináta renszer megválasztásától.
- $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{R})$ vektormező: a tér minden pontjához hozzárendel egy adott hosszúságú és adott irányú vektort, ez NEM FÜGG a koordináta rendszer megválasztásától.
- $v^i = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$ tenzormező: a tér minden pontjához hozzárendel egy koordináta mátrixot (ami egy tenzor[1]), függ a koordináta rendszer megválasztásától, méghozzá "tenzorosan függ": $v^{i'} = v^i J_i^{i'}$ (lásd később).
- $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a Descartes coordináta rendszer bázisvektorai. Más jelölések: $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, vagy $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ (fizikusok). Általánosságban egy bármilyen Z^i koordináta rendszer kovariáns[2] bázisvektorai: $\boldsymbol{Z}_i$.

Tenzor index jelölés. Einstein vezette be a mátrix-vektor, mátrix-mátrix és általában a tenzor-tenzor szorzatok szummás felírásának rövidítésére. Pl. legyen

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 \\ B_1^2 & B_2^2 \end{pmatrix},\quad v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix},\quad u = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ekkor

$$Av = \begin{pmatrix} A_{11}v^1 + A_{12}v^2 + A_{13}v^3 \\ A_{21}v^1 + A_{22}v^2 + A_{23}v^3 \\ A_{31}v^1 + A_{32}v^2 + A_{33}v^3 \end{pmatrix},\quad vu = \begin{pmatrix} v^1u^1 & v^1u^2 & v^1u^3 \\ v^2u^1 & v^2u^2 & v^2u^3 \\ v^3u^1 & v^3u^2 & v^3u^3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ekkor Av vektor i-edik eleme, vagy vu mátrix ij-edik eleme:

$$(Av)_i = \sum_{i=1}^{3} A_{ij}v^j \overset{\text{jel}}{=} A_{ij}v^j,\quad (vu)^{ij} = v^i u^j = u^j v^i \tag{5}$$

Egy mátrix nyomát is ki lehet fejezni ilyen módon:

$$\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^{2} B_i^i \overset{\text{jel}}{=} B_i^i\ ,\quad \text{viszont}\quad \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} \neq A_{ii}\quad \text{(értelmetlen, mert mindkét } i \text{ alsó index)}$$

Jelölje $[\cdot]$ egy tenzor index jelöléssel magadott objektum mátrix reprezentációját, pl.

$$[Z_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Azonban óvatosnak kell lennünk, ugyanis az indexelt objektumok mátrix reprezentációja nem egyértelmű. Egy kovariáns v_i egy indexű objektumot többnyire sorvektorként, egy kontravariáns v^i egy indexű objektumot pedig oszlopvektorként értelmezünk, de ez nem szabály. Pl. Z_{ij}-t a következő képpen és értelmezhetjük:

$$[Z_{ij}] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & r^2 \end{array}\right) \tag{7}$$

vagyis, mint egy hiper-sorvektor, de nem ez a megszokott.

Szabályok

1. alsó (kovariáns) indexek: v^i és felső (kontravariáns) indexek: A_{ij} fontos jelentősséggel bírnak.
2. két azonos index szummázást jelent a megadott dimenziók szerint, de csak akkor értelmes a kifejezés, ha az egyik index alsó a másik felső. Egy index legfeljebb csak kétszer szerepelhet egy kifiejezésben.

$$\begin{aligned} &T_{jt}^{klm} = U_{ij}^{kl}V_t^{im} = \sum_{i=1}^{n} U_{ij}^{kl}V_t^{im} && \text{(ennek van értelme)} \\ &U_{ij}V_j \text{ vagy } U_{ij}V^jW_j && \text{(értelmetlen)} \end{aligned} \tag{8}$$

[1] jelen esetben egy 1 dimenziójú tenzort (1-tenzort)

[2] kovariáns - alsó index $_i$ (sorvektornak feleltethető meg), kontravariáns - felső index ^{i} (oszlopvektornak feleltethető meg), bár a tenzoralgebrában nincs olyan, hogy sorvektor vagy oszlopvektor, ezt csak akkor hozzuk be, ha lineáris algebrai úton próbáljuk elképzelni a tenzoralgebrai változókat, szorzatokat

3. Ha egy felső index a nevezőben van, akkor az alsó index lesz az eredményben:
$$T_i = \frac{\partial V}{\partial Z^i} \tag{9}$$
4. lásd még: [1, 4.5 fejezet]

Megj. nem minden indexelt objektumot hívunk tenzornak, csak azokat amelyek "tenzorosan függnek" a koordináta rendszer megválasztásától, vagyis

1. egy T^i objektumot akkor tenzor, ha ennek értéke Z' koordináták mellett $T^{i'} = T^i J_i^{i'}$ [1, 6.3.1]
2. egy T_k^{ij} objektum "háromszorosan" tenzor, ha ennek érték az új koordinátákban $T_{k'}^{i'j'} = T_k^{ij} J_i^{i'} J_j^{j'} J_{k'}^k$ [1, 6.4 Tensors of Higher Order]

2.2 Áttérés Descartes koordinátákról polárkoordinátákra (2D)

Kiindulási koordináták: $Z^i = x, y$. (i felső index, nem hatványkitevő)
Célkoordináták: $Z^{i'} = r, \theta$. Leképzés:
$$Z^i = Z^i\left(Z^{1'}, Z^{2'}\right) \stackrel{\text{jel}}{=} Z^i(Z') \; : \quad \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \tag{10}$$
A leképzés Jacobi mátrixa:
$$J_{i'}^i := \frac{\partial Z^i}{\partial Z^{i'}}, \qquad J := \left[J_{i'}^i\right] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z^1}{\partial Z^{1'}} & \dfrac{\partial Z^1}{\partial Z^{2'}} \\[2ex] \dfrac{\partial Z^2}{\partial Z^{1'}} & \dfrac{\partial Z^2}{\partial Z^{2'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{11}$$

```
syms x y r theta real
Z = [ x ; y ];
Zp = [ r ; theta ];

Mapping = [
    r*cos(theta)
    r*sin(theta)
    ];

Jip = jacobian(Mapping, Zp);
```

Határozzuk meg az inverz leképzést. Emeljük négyzetre mindkét egyenletet (10), majd adjuk őket össze. Mivel r csak pozití lehet, kapjuk:
$$\begin{cases} x^2 = r^2\cos^2(\theta) \\ y^2 = r^2\sin^2(\theta) \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{12}$$
Ha $x \neq 0$, akkor a második egyenletet az elsővel osztva kapjuk:
$$\frac{y}{x} = \tan(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{13}$$
Tehát az inverz leképzés:
$$Z^{i'} = Z^{i'}\left(Z^1, Z^2\right) \stackrel{\text{jel}}{=} Z^{i'}(Z) \; : \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \tag{14}$$

```
assume(in(r,'real') & r > 0 & x > 0 & y > 0)

Zp_sol = solve(Mapping - Z, Zp)

Mappingp(r,theta) = simplify([
    Zp_sol.r(1)
    Zp_sol.theta(1)
    ])
```

Matlab által adott válasz:
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = -2\arctan\left(\dfrac{x - \sqrt{x^2 + y^2}}{y}\right) \end{cases} \tag{15}$$

4. feladat. Helyes-e a válasz? Miért ezt kaptuk, hogyan számolt a Matlab? Próbáljuk meg reprodukálni (papíron ceruzával).

Számítsuk ki a Jacobi mátrixát az inverz leképzésnek. Használjuk az általunk számolt leképzést (14).

$$J^{i'}_i := \frac{\partial Z^{i'}}{\partial Z^i}, \qquad J := \left[J^i_{i'}\right] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z^{1'}}{\partial Z^1} & \dfrac{\partial Z^{1'}}{\partial Z^2} \\ \dfrac{\partial Z^{2'}}{\partial Z^1} & \dfrac{\partial Z^{2'}}{\partial Z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \tag{16}$$

5. feladat. Igazoljuk, hogy $J^i_{i'} J^{i'}_j = \delta^i_j$ (i.e. $J^i_{i'}$ és $J^{i'}_i$ mátrixszorzata egységmátrixot ad), vagyis $J^{i'}_i$ mátrixinverze $J^i_{i'}$-nak.

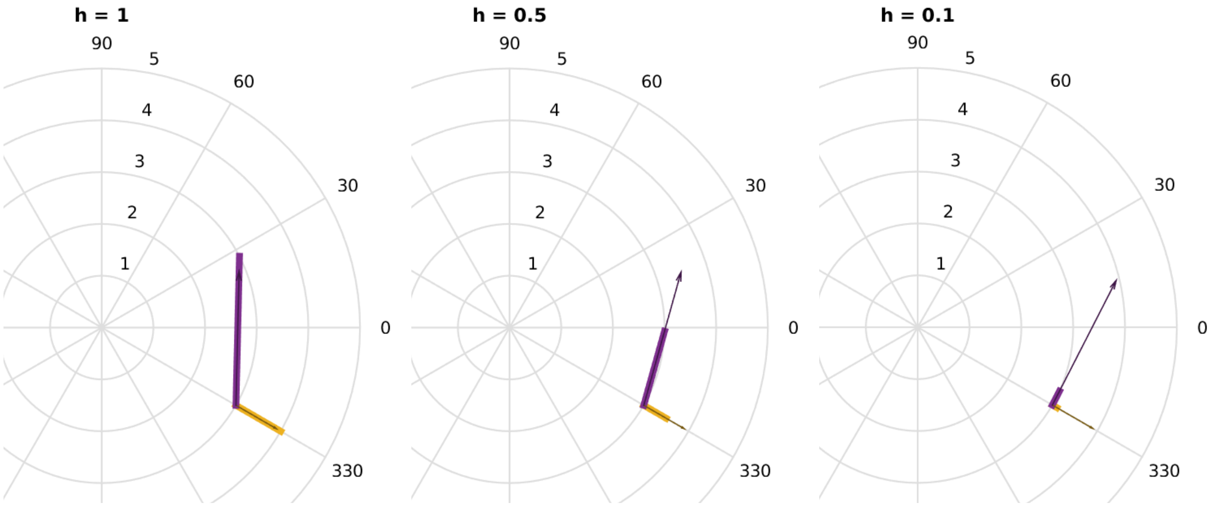


Figure 1: Barna vektor: $\boldsymbol{Z}_r$, lila vector: $\boldsymbol{Z}_\theta$.

2.3 Polárkoordináták bázisvektorai

Legyen $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(r,\theta)$ egy pont a térben. $\boldsymbol{R}$ koordinátafüggetlen pont a térben, az $\boldsymbol{R}(r,\theta)$ jelölés csak azt modja meg, hogy r és θ koordináták szerint dekomponálom.

Határozzuk meg, hogyan változik $\boldsymbol{R}$ pont helyzete, ha egyik koordináta szerint egységnyire elmozdítom:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_1 &\overset{\text{jel}}{=} \boldsymbol{Z}_r = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{R}(r+h,\theta)-\boldsymbol{R}(r,\theta)}{h} = \frac{\partial \boldsymbol{R}(r,\theta)}{\partial r}, \quad \|\boldsymbol{Z}_r\| = 1 \\ \boldsymbol{Z}_2 &\overset{\text{jel}}{=} \boldsymbol{Z}_\theta = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{R}(r,\theta+h)-\boldsymbol{R}(r,\theta)}{h} = \frac{\partial \boldsymbol{R}(r,\theta)}{\partial \theta}, \quad \|\boldsymbol{Z}_\theta\| = r, \quad \text{lásd Figure. 1.}\end{aligned} \tag{17}$$

6. feladat. Igazold, hogy $\|\boldsymbol{Z}_i\|$ valóban a fentiekben megadott értékek.

A különböző koordináták mentén történő egységnyi elmozdulásvektorok fogják megadni a Z^i koordinátarendszer $\boldsymbol{Z}_i$ bázisvektorait:

$$\boldsymbol{Z}_i := \frac{\partial \boldsymbol{R}(Z)}{\partial Z^i} \tag{18}$$

Megjegyzés. A fizikában ezen bázisvektorokat *normalizálják* és így jelölik:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{Z}_r}{\|\boldsymbol{Z}_r\|}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\boldsymbol{Z}_\theta}{\|\boldsymbol{Z}_\theta\|}, \quad \text{Descartes k.r.: } \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{i} = \boldsymbol{Z}_x,\ \hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{j} = \boldsymbol{Z}_y,\ \hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{Z}_z \quad \text{(3D)} \tag{19}$$

2.4 Metrika tenzor

Megszokhattuk, hogy Descartes koordináta rendszerben a skalárszorzat a következőképpen működik:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle u^1\boldsymbol{i} + u^2\boldsymbol{j}, v^1\boldsymbol{i} + v^2\boldsymbol{j}\rangle = u^1v^1 + u^2v^2 \tag{20}$$

mivel $\langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\rangle = \langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{j}\rangle = 1$, $\langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle = \langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{i}\rangle = 0$. Tény, hogy polárkoordináták esetén is $\boldsymbol{Z}_r \perp \boldsymbol{Z}_\theta$, azonban a bázisvektorok nem normáltak, ezért

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle &= \langle u^1\boldsymbol{Z}_1 + u^2\boldsymbol{Z}_2, v^1\boldsymbol{Z}_1 + v^2\boldsymbol{Z}_2\rangle = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \\ \text{tenzor index jelöléssel:} \quad &= \langle u^i\boldsymbol{Z}_i, v^j\boldsymbol{Z}_j\rangle = u^iv^j\langle \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{Z}_j\rangle = u^iv^jZ_{ij} \end{aligned} \tag{21}$$

ahol $Z_{ij} = Z_{ji} = \langle \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{Z}_j\rangle$ a metrix tenzor. Lineáris algebrából szemlélve egy n dimenziós vektortérben Z_{ij} egy szimetrikus pozitív definit $n \times n$-es mátrix. Z_{ij} inverzét Z^{ij}-vel jelöljük, ez a kontravariáns metrika tenzor: $Z_{ij}Z^{jk} = \delta_i^k$ ("egységtenzor").

Polárkoordináták esetén:

$$[Z_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad [Z^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Megjegyzés. A metrika tenzor megadja, hogy adott pontból adott irányba milyen mértékben torzul a hosszúságmérés. A fizikában Z_{ij}-t főleg g_{ij}-vel jelölik.

2.5 Christoffel szimbólum [1, 5.12 fejezet]

Más néven *konnexiós koefficiensek* [2, 4.4 fejezet]: Γ^k_{ij}, melyet a következő képlettel számolhatunk

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} Z^{km} \left(\frac{\partial Z_{mi}}{\partial Z^j} + \frac{\partial Z_{mj}}{\partial Z^i} - \frac{\partial Z_{ij}}{\partial Z^m} \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} Z^{km} \left(\frac{\partial Z_{mi}}{\partial Z^j} + \frac{\partial Z_{mj}}{\partial Z^i} - \frac{\partial Z_{ij}}{\partial Z^m} \right) \tag{23}$$

Ezt egy háromdimenziós hipermátrixként lehet felfogni, hogy pontosan mit jelent a fent említett referenciákban pontosan le van írva. Ennek automatikus kiszámítása sem egyszerű, ezért ennek Matlab kódját megadom:

```
syms r t real   % koordinatak r: tavolsag origotol
zi = [ r ; t];  %             t, azaz theta: x tengellyel bezart szog

Z_ij = [ .. ];  % kovarians metrika tenzor (also index)
Zij = [ .. ];   % kontravarians metrika tenzor (felso index)

% Gamma(i,j,k) kiszamitasa
Gamma = sym(zeros(n,n,n));
for i = 1:n
    for j = 1:n
        for k = 1:n
            for m = 1:n % osszegzes m szerint
                Gamma(i,j,k) = Gamma(i,j,k) + 0.5 * Zij(k,m) * ( ...
                    diff(Z_ij(m,i), zi(j)) + diff(Z_ij(m,j), zi(i)) - diff(Z_ij(i,j), zi(m)) ...
                    );
            end
        end
    end
end
Gamma
```

```
Gamma(:,:,1) =
[ 0,  0]
[ 0, -r]
Gamma(:,:,2) =
[   0, 1/r]
[ 1/r,   0]
```

$$\text{vagyis:} \quad [\Gamma^1_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}, \quad [\Gamma^2_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

7. feladat (Christoffel szimbólum kiszámítása). Matlab: `reshape, permute`

A fenti Matlab kód egy négyszer egymásba ágyazott for ciklusokkal számolja ki Γ^k_{ij}-t. Ez Matlabban rendkívül időigényes. Számoljuk ki Γ^k_{ij}-t csak a beépített hatékony vektorműveletekkel.

2.6 Kovariáns derivált operátor ∇_j

2.6.1 Skalármező kovariáns deriváltja és gradiense

2. definíció (Skalármező kovariáns deriváltja, gradiense). Skalármezőre alkalmazva a kovariáns derivált operátort így definiáljuk [1, Eq. (8.18)]:

$$\nabla_j F = \frac{\partial F}{\partial Z^j} \tag{25}$$

És ez nem más, mint a skalármező gradiensének ***kovariáns*** komponensei [1, Eq. (6.49)], azaz

$$\operatorname{grad} F = \nabla_j [F] \, \boldsymbol{Z}^j = \frac{\partial F}{\partial Z^j} \boldsymbol{Z}^j = Z^{ij} \nabla_j [F] \, \boldsymbol{Z}_i = Z^{ij} \frac{\partial F}{\partial Z^j} \boldsymbol{Z}_i \tag{26}$$

Tehát $Z^{ij} \nabla_j F$ a gradiens kontravariáns (megszokott) komponensei.

Az (26)-ben látott egyenlőségsorozat nem következik egyértelműen, az egyenlőség a ∇_j operátor metrilinikus tulajdonságából adódik [1, 8.6.7. fejezet], ami azt jelenti, hogy

$$\nabla_k Z_{ij} = 0, \ \nabla_k Z^{ij} = 0, \ \nabla_j \boldsymbol{Z}_i = 0, \ \nabla_j \boldsymbol{Z}^i = 0 \tag{27}$$

Görbült sokaságokon értelmezett koordinátarendszerben ez nem teljesül, azonban most a klasszikus $\mathbb{R}^n$-ben vagyunk, csak az $\mathbb{R}^n$-ben felvett koordinátarendszer az ami nem a megszokott, ugyanis pontonént változó bázisvektorú, görbe vonalú koordinátákkal dolgozunk. A (27)-nek következtében:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} F &= \nabla_j [F] \, \boldsymbol{Z}^j + F \, \nabla_j [\boldsymbol{Z}^j] = \nabla_j [F \, \boldsymbol{Z}^j] = \nabla_j [F (Z^{ij} \boldsymbol{Z}_i)] = \nabla_j [Z^{ij} (F \boldsymbol{Z}_i)] \\ &= Z^{ij} \nabla_j [F \boldsymbol{Z}_i] + \underbrace{\nabla_j [Z^{ij}] F \boldsymbol{Z}_i}_{=0} = Z^{ij} \nabla_j [F \boldsymbol{Z}_i] = Z^{ij} \nabla_j [F] \boldsymbol{Z}_i + \underbrace{F \nabla_j [\boldsymbol{Z}_i]}_{=0} = Z^{ij} \nabla_j [F] \boldsymbol{Z}_i \end{aligned} \tag{28}$$

A fenti levezetésben a $[Z^{ij}]$ jelölés nem a Z^{ij} tenzor mátrix reprezentációját jelöli. A $[\cdot]$ zárójellel azt jelöljük, hogy aktuálisan mire alkalmazzuk a kovariáns deriválást.

2.6.2 Ternzormező kovariáns deriváltja

Legyen $\boldsymbol{V}(x,y)$ egy vektormező, melynek kontravariáns komponensei a $Z^i = x, y$ Descartes koordinátarendszerben legyen $V^i(x,y)$, $Z^{i'} = \varrho, \vartheta$ polárkoordinátákban pedig legyen $V^{i'}(\varrho,\vartheta)$, azaz

$$\boldsymbol{V}(x,y) = V^i(x,y)\boldsymbol{Z}_i = V^1(x,y)\boldsymbol{Z}_x + V^2(x,y)\boldsymbol{Z}_y = V^{1'}(\varrho,\vartheta)\boldsymbol{Z}_\varrho + V^{2'}(\varrho,\vartheta)\boldsymbol{Z}_\vartheta = V^{i'}(\varrho,\vartheta)\boldsymbol{Z}_{i'} = \boldsymbol{V}(\varrho,\vartheta)$$

Egy konkrét példa:

$$\boldsymbol{V} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{Z}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{Z}_y = 1\cdot\boldsymbol{Z}_r + 0\cdot\boldsymbol{Z}_\theta \tag{29}$$

Descartes koordináta rendszerben egy $\boldsymbol{V}$ vektormező megváltozását a V^i koordinátáinak deriváltjaival adtuk meg (Jacobi mátrix):

$$\mathrm{D}V^i(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^1}{\partial x} & \frac{\partial V^1}{\partial y} \\ \frac{\partial V^2}{\partial x} & \frac{\partial V^2}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{30}$$

Mi a helyzet az általános koordináták rendszerekkel? Észrevehető, hogy $\boldsymbol{V}$ vektormező polárkoordináták szerinti kontravariáns $V^{i'}$ koordináta komponensei konstans értékűek (a Jacobi mátrix nulla), pedig tudjuk, hogy $\boldsymbol{V}$ értéke pontonként változik. Azonban ez a változás nem tükröződik a polárkoordinátákban, mert a $\boldsymbol{Z}_{i'} = \boldsymbol{Z}_\varrho, \boldsymbol{Z}_\vartheta$ bázisvektorok értéke is pontonként változik. Ezt a változást valahogy bele kell integrálni a $\nabla_j V^i$ kovariáns deriváltba.

3. definíció (Tenzormező kovariáns deriváltja)**.** Egy $V^i(Z)$ tenzormező kovariáns deriváltja tehát a mögöttes invariáns $\boldsymbol{V} = V^i(Z)\boldsymbol{Z}_i$ vektormező megváltozását hivatott megadni az egyes Z^i koordináták szerint. A $V^i(Z)$ tenzormező kovariáns deriváltját a következő formula definiálja [1, Eq. (8.11)]:

$$\nabla_j V^i(Z) = \frac{\partial V^i}{\partial Z^j} + \Gamma^i_{jm}V^m(Z), \qquad \text{ahol } V^i(Z) = V^i(Z^1,..,Z^n). \tag{31}$$

Ugyanennek a $\boldsymbol{V} = V^i(Z)\boldsymbol{Z}_i = V_i(Z)\boldsymbol{Z}^i$ vektormezőnek a megváltozáját a $V_i(Z)$ kovariáns komponensek kovariáns deriváltjával is megadhatjuk [1, Eq. (8.14)] (egyik a másikból levezethető):

$$\nabla_j V_i(Z) = \frac{\partial V_i}{\partial Z^j} - \Gamma^m_{ij}V_m(Z). \tag{32}$$

A kovariáns derivált pontos fizikai értelmét a [1, 8. fejezet] és [2, 4.5. fejezet] pontosan megmagyarázza. Ennek segítségével megadhatjuk egy tenzormező divergenciáját illetve egy skalármező Laplacian-ját tetszőleges koordináta rendszerben.

Descartes koordináta rendszerben $\Gamma^k_{ij} = 0$, ezért itt $\nabla_j V^i$ megegyezik a $\mathrm{D}V^i(x,y)$ Jacobi mátrixal. Pl.

$$\boldsymbol{V}(x,y) = V^1(x,y)\boldsymbol{Z}_x + V^2(x,y)\boldsymbol{Z}_y = xy\boldsymbol{Z}_x + (x^2+y^2)\boldsymbol{Z}_y, \text{ vagyis } V^i(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Mivel $\Gamma^k_{ij} = 0$, a kovariáns derivált a következő lesz:

$$\nabla_j V^i(x,y) = \frac{\partial V^i}{\partial Z^j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^1}{\partial x} & \frac{\partial V^1}{\partial y} \\ \frac{\partial V^2}{\partial x} & \frac{\partial V^2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = \mathrm{D}V^i(x,y) \tag{34}$$

2.6.3 Vektormező divergenciája

Eddigi tudásunk szerint a divergencia nem más mint a Jacobi mátrix nyoma, azaz:

$$\mathrm{div}\Big(\boldsymbol{V}(x,y)\Big) = \mathrm{tr}\Big(\mathrm{D}V^i(x,y)\Big) = \frac{\partial V^1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial V^2(x,y)}{\partial y} \tag{35}$$

Általánosságban is így van (egy kis korrekcióval):

4. definíció (Egy vektor-/tenzormező divergenciája)**.** Egy tenzormező divergenciáját a következőképpen definiáljuk [1, Eq. (8.2)]:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{V}(x,y)) = \mathrm{tr}\Big(\nabla_j V^i\Big) = \nabla_i V^i = \frac{\partial V^i}{\partial Z^i} + \Gamma^i_{im}V^m \tag{36}$$

A tenzorkontrakciónak [1, 6.3.2. fejezet] köszönhetően a divergencia ***invariáns***, azaz a *koordináták megválasztásától független*, ezért nyugodt lélekkel azt is mondhatjuk, hogy $\nabla_i V^i$ a mögöttes ***invariáns*** $\boldsymbol{V} = V^i\boldsymbol{Z}_i$ vektormező divergenciáját adja meg.

Mindez Matlabban

Legyen

$$\boldsymbol{V} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{Z}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{Z}_y = 1\cdot\boldsymbol{Z}_r + 0\cdot\boldsymbol{Z}_\theta \tag{37}$$

Most csak a polárkoordinátákat tekintjük: $V^{i'}(\varrho,\vartheta) = \binom{1}{0}$.

```
Vi = [ 1 ;0 ];
% Kontravarians derivalt szamitasa:
Nabla_jVi = jacobian(Vi,Z);
for j = 1:n
    for i = 1:n
        for m = 1:n
            Nabla_jVi(i,j) = Nabla_jVi(i,j) + Gamma(j,m,i)*Vi(m);
        end
    end
end
% Divergencia szamitasa:
div_Vi = trace(Nabla_jVi)
```

```
Nabla_jVi =
[ 0,   0]
[ 0, 1/r]
div_Vi =
1/r
```

$$\text{vagyis:}\ \left[\nabla_j V^{i'}(\varrho,\vartheta)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{V}) = \nabla_{i'} V^{i'}(\varrho,\vartheta) = \frac{1}{r} \tag{38}$$

Descartes koordináta rendszerben a következőt kapnánk:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{V}(x,y)) = \operatorname{div}\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r} \tag{39}$$

Egy általános $V^i(r,\theta)$ tenzormező kontravariáns deriváltja és divergenciája:

```
syms r t real
Vi = [ sym('V1(r,t)') ; sym('V2(r,t)') ];
assume(in(Vi, 'real'))
Nabla_jVi = jacobian(Vi,Z);
for j = 1:n
    for i = 1:n
        for m = 1:n
            Nabla_jVi(i,j) = Nabla_jVi(i,j) + Gamma(j,m,i)*Vi(m);
        end
    end
end
div_Vi = trace(Nabla_jVi)
```

```
Nabla_jVi =
[              diff(V1(r, t), r), diff(V1(r, t), t) - r*V2(r, t)]
[ diff(V2(r, t), r) + V2(r, t)/r, diff(V2(r, t), t) + V1(r, t)/r]
div_Vi =
diff(V1(r, t), r) + diff(V2(r, t), t) + V1(r, t)/r
```

vagyis

$$\begin{aligned} \left[\nabla_j V^i\right] &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V^1(r,t)}{\partial r} & \dfrac{\partial V^1(r,t)}{\partial t} - rV^2(r,t) \\ \dfrac{\partial V^2(r,t)}{\partial r} + \dfrac{V^2(r,t)}{r} & \dfrac{\partial V^2(r,t)}{\partial t} + \dfrac{V^1(r,t)}{r} \end{pmatrix}, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{V}) &= \operatorname{tr}\left(\nabla_j V^i\right) = \nabla_i V^i = \frac{\partial V^1(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial V^2(r,t)}{\partial t} + \frac{V^1(r,t)}{r}. \end{aligned} \tag{40}$$

2.7 Egy skalármező második kontravariáns deriváltja

Az eddig ismertetett deriváltak segítségével módunkban áll egy F skalármező második kontravariáns deriváltját is megadni. F első deriváltja $\nabla_i F$, mely egy kovariáns tenzormező, ennek is vehetjük a kovariáns deriválját.

5. definíció. F skalármező második kontravariáns deriváltja [1, Eq. (8.25)]

$$\nabla_j\left(\nabla_i F\right) = \frac{\partial \nabla_i F}{\partial Z^j} - \Gamma^m_{ij}\left(\nabla_i F\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial Z^i \partial Z^j} - \Gamma^m_{ij}\frac{\partial F}{\partial Z^m} \tag{41}$$

ami az F skalármező Hesse-mátrixának felel meg általános koordinárendszerben.

A második derivált segítségével megadhatjuk egy skalármező Laplace operátorát.

6. definíció (A Δ Laplace operátor)**.** Egy F skalármező Laplace-át így definiáljuk [1, Eq. (8.17)]:

$$\Delta F = Z^{ij}\nabla_i\nabla_j F = \nabla^i\nabla_i F = Z^{ij}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial Z^i \partial Z^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial F}{\partial Z^k}\right) \tag{42}$$

2.8 Feladatok

A továbbiakban használjuk a [1]-et. Az ott leírtak alapján válaszoljuk meg a következő kérdéseket.

8. feladat. Az 2. definíció alapján adjuk meg polárkoordinátákban, hengerkoordinátákban majd gömbkoordinátákban ***(továbbiakban p.h.g.)*** egy $F(\varrho, \vartheta)$ skalárfüggvény gradiensének kovariáns, majd kontravariáns komponenseit. Részletesebb leírás itt található [1, Eq. (6.49)]. A gradienst általános $F(\varrho, \vartheta)$, $F(\varrho, \vartheta, z)$, $F(\varrho, \vartheta, \varphi)$ függvényekre adjuk meg, lásd pl. (40).

9. feladat. Adjuk meg p.h.g-ben egy $\boldsymbol{V}$ vectormező kontravariáns deriváltját és divergenciáját.

10. feladat. Adjuk meg p.h.g.-ben egy F skalármező Laplace-át [1, Eq. (8.17, 8.25)].

11. feladat. Az 5. és 6. definíciók alapján Matlabban számoljuk ki egy konrét skalárfüggvény pl. $F =$ második kovariáns deriváltját és Laplace-át p.h.g-ben, vagy akár ciklois koordinátákban, tetszőleges koordinátákban.

References

[1] P. Grinfeld, *Introduction to Tensor Analysis and the Calculus of Moving Surfaces.* Springer New York, 2016.

[2] P. Hraskó, “Relativitáselmélet,” *Typotex Kiadó Budapest*, 2016.