1. Vektoranalízis (anal3)

Szorgalmi házi feladatok + Matlab

verzió: 2018.09.10. – 12:59:08

Contents

Jelölések, alapfogalmak

1. Vektor értékű mennyiségek:

   helyzetvektor (pozícióvektor):
   2D: $\boldsymbol{r} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, 3D: $\boldsymbol{r} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, dimenziófüggetlen jelölés: $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right)$

   vektor értékű függvények (vektormezők):
   tipikusan erőterek, fizikai mennyiségek: $\boldsymbol{F}(x, y)$,
   a kis betűs jelölést is intenzíven használjuk: $\boldsymbol{f}(x_1, x_2, ..., x_n)$
   rövidített jelölés: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

   paraméteres görbék: $\boldsymbol{\gamma}(t)$ (gamma), $\boldsymbol{\varrho}(t)$ (rho)

   paraméteres felületek: $\boldsymbol{s}(u, v)$, $\boldsymbol{S}(u, v)$

   vektor értékű differenciálformák
   vonal menti differenciál: $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$
   felület menti differenciál: $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$

   Írásban a vektor értékű mennyiségeket többnyire nem jelölöm, ha mégis, akkor a következő jelölést használom: $\vec{r}$, $\vec{F}(x, y)$, $\mathrm{d}\vec{S}$, ...

   vektor iránya alatt egy vektor tartóegyenesének meredekségét értem.
   Ennek értelmében $\boldsymbol{r}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ és $\boldsymbol{r}_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ vektorok iránya megegyezik.

   vektor irányítása megadja, hogy az adott vektor a tartóegyenes mentén melyik irányba mutat.
   Ennek értelmében $\boldsymbol{r}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ és $\boldsymbol{r}_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ vektorok irányítása ellentétes.

2. skalármező gradiense:
$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{1}$$

3. vektormező Jacobi mátrixa:
$$\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{2}$$

4. polárkoordináták: (r, ϑ) vagy (r, θ)

5. gömbi polárkoordináták: (r, ϑ, φ) vagy (r, θ, φ)

1 Alapfeladatok (numerikus függvénytan)

1. feladat (Szigorúan monotón függvény inverzének kiszámítása)**.** Adott egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monotón növekvő függvény, melynek nem ismert az analitikus alakja, csak diszkrét pontokban ismerjük az értékét. Ezt a következő képpen jelölöm:

$$f : \left\{ (x_i, y_i) \;\middle|\; f(x_i) = y_i,\ i = \overline{1, N} \right\} \tag{3}$$

Hogyan tudnák hasonlóképpen megadni az f függvény inverzét.

2. feladat (Interpoláció)**.** `interp1`

Adott $f : \left\{ (x_i, y_i) \;\middle|\; f(x_i) = y_i,\ i = \overline{1, N} \right\}$, továbbá adottak $x'_j \in [x_1, x_N]$. Számítsuk ki (közelítő érték) $y'_j = f(x'_j)$-t, ahol $j = \overline{1, M}$.

3. feladat (Függvényösszetétel numerikusan)**.** Hogyan értelmeznénk numerikus reprezentációjú függvények összetételét?

2 Numerikus integrálok

4. feladat. Numerikus integrálás normáltartományon `integral2`

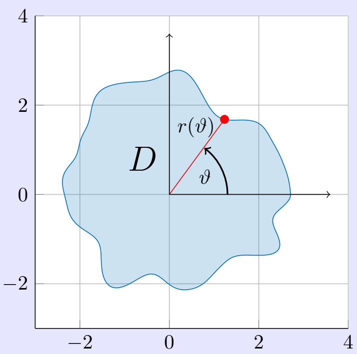
Számítsuk ki numerikusan az $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$ felületintegrált, ahol $f(x, y)$ egy tetszőleges skalár értékű függvény pl. $f(x, y) = x^2 y + e^{-(x^2+3xy+4y^2)}$, D pedig egy tetszőleges normáltartomány, pl.

$$\text{kezdetben: } D = [-1, 2] \times [-2, 4] \tag{4}$$

$$\text{majd: } D = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [h_1(x), h_2(x)]\} \tag{5}$$

5. feladat. Numerikus integrálás egy "furcsa" tartományon `integral2`

Számítsuk ki numerikusan az $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$ felületintegrált, ahol $f(x, y)$ egy tetszőleges függvény pl.



D pedig az itt látható tartomány, mely polárkoordinátákban normáltartományként is megadható:

$$D = \{(r, \vartheta) \mid r \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, r(\vartheta)]\} \tag{6}$$

Az $r(\vartheta)$ függvény analitikus alakját nem ismerjük, ezért ezt numerikusan diszkrét pontokban megadjuk a következő módon:

$$\left\{ (r_i, \vartheta_i) \;\middle|\; i = \overline{1, n} \right\} \quad \text{(egyszerűbb eset)} \tag{7}$$

$$\left\{ (x_i, y_i) \;\middle|\; i = \overline{1, n} \right\} \quad \text{(bonyolultabb eset)} \tag{8}$$

A `vekanal_amoba.mat` állomány négy egyforma hosszúságú tömböt tartalmaz: `x`, `y`, `r`, `theta`.

6. feladat. Polárkoordinátákra való áttérés `polar`

Azt tudjuk, hogy a polárkoordináták ismeretében a Descartes coordináták könnyen számolhatók:

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases} \tag{9}$$

azonban az inverz leképzés esetén bajban vagyunk

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), \end{cases} \tag{10}$$

ugyanis $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ nem értelmezett a $(0, y)$ pontok esetén, továbbá, $(-1, -1)$ és $(1, 1)$ pontokra ugyanazt a szöget adja. Adjunk meg $\vartheta(x, y)$-ra egyetlen képletben egy olyan függvényt, mely minden $\vartheta \in [0, 2\pi)$-re működik. A 5. feladatban megadott tartomány határvonala diszkrét pontokban Descartes koordinátákban és polárkoordinátákban is meg van adva. A képlet alapján próbáljuk meg rekonstruálni egyiket a másikból, azaz $(r, \theta) \to (x, y)$ majd $(x, y) \to (r, \theta)$. Polárkoordinátás ábrázoláshoz használhatjuk a `polar(theta,r)` beépített függvényt.

7. feladat. Vonalintegrál `integral`

Matlabban számítsuk ki numerikusan mekkora munkát gyakorol egy F erőtér egy anyagi pontra, miközben az anyagi pont a Γ által leírt görbe mentén halad. Magyarán szólva, integráld az F vektormezőt Γ görbe mentén. F és Γ tetszőlegesen megválasztható, támpontként szolgálhat az 1. gyakorlat 5-7. feladata. Ugyanazokat a függvényeket is lehet használni.

Támpont:

1. Definiáljunk egy x és y-tól függő `F`, majd egy t-től függő `gamma` szimbolikus függvényt.
2. $\gamma(t)$ deriváltjának kiszámításához használjuk a `diff` parancsot.
3. A `subs` parancs segítségével helyettesítsük be `[x;y]` helyébe a `gamma`-t, hogy megkapjuk $F(\gamma(t))$-t.
4. A szimbolikus `t` változótól függő integrandust alakítsuk anoním függvénnyé a `matlabFunction` segítségével. Nevezzük el (pl.) `Integrand_fh`-nek
5. Végül hívjuk meg az `integral` parancsot numerikus integrálás végett:
   `I = integral(Integrand_fh,t0,t1)`

8. feladat. Felületintegrál `integral2`

Matlabban számítsuk ki numerikusan mekkora a *hozama* egy $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ vektormező által leírt áramlásnak egy $\boldsymbol{S}(u,v)$ paraméteresen megadott felületen keresztül. Vagyis:

$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = ? \tag{11}$$

3 Skalárpontenciálos vektormezők a fizikában

Érdekes, hogy a fizikában a potenciálfüggvényt negatív előjellel illetik meg, azaz egy $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ vektormezőnek $V(\boldsymbol{r})$ a potenciálfüggvénye, ha $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})$, ahol $\boldsymbol{r} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ a vizsgálandó pont pozícióvektora vagy helyzetvektora.

Gravitációs mező és potenciál

A gravitációs mező a Föld felszíne mentén lokálisan egy homogén mezőként viselkedik:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{smallmatrix}\right), \tag{12}$$

ahol g a gravitációs gyorsulás. A gravitációs mező potenciálfüggvénye: $V_G(\boldsymbol{r}) = gz$. Egy m tömegű test potenciális energiája, illetve a rá ható gravitációs erő $\boldsymbol{r}$ pontban a következők:

$$\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{r}) = m\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \in \mathbb{R}^3 \qquad V_m(\boldsymbol{r}) = mV_G(\boldsymbol{r}) \in \mathbb{R} \tag{13}$$

Elektromos mező és potenciál

Az elektromos mező erőssége a vizsgálandó $\boldsymbol{r}$ pontban az origóban elhelyezett Q ponttöltés körül:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\boldsymbol{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{r}, \text{ ahol } \boldsymbol{r} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \tag{14}$$

Ezen elektromos mező potenciálfüggvénye

$$V_E(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\|\boldsymbol{r}\|} \tag{15}$$

Ekkor az elektromos tér egy q töltésre ható ereje: $\boldsymbol{F}_q(\boldsymbol{r}) = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ (Coulomb törvénye). Továbbá egy q töltés potenciális energiája ezen erőtérben: $V_q(\boldsymbol{r}) = qV_E(\boldsymbol{r})$.

9. feladat. Igazold, hogy $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ valóban skalárpotenciálos, vagyis $\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$.

Potenciálfüggvény kiszámításának módja

Legyen

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} yz \\ xy \\ xy \end{pmatrix}, \quad \text{skalárpotenciálos mivel } \nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{16}$$

Ennek $V(\boldsymbol{r})$ potenciálfüggvénye $\boldsymbol{r}$ pontban a következő vonalintegrállal számítható:

$$V(\boldsymbol{r}) = \pm \int_\Gamma \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}), \mathrm{d}\boldsymbol{l}\rangle, \quad \text{ahol } \Gamma = \left\{\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in [0,1],\ V(\boldsymbol{\gamma}(0)) = 0 \text{ és } \boldsymbol{\gamma}(1) = \boldsymbol{r}\right\} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} + &: \text{ matematikus potenciál: } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = +\nabla V(\boldsymbol{r}) \\ - &: \text{ fizikus potenciál: } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{18}$$

Vagyis integráljuk a vektormezőt egy nulla potenciálú ponttól az $\boldsymbol{r}$ pontig egy tetszőleges úton (mivel potenciálos). A nulla potenciálú pont tetszőlegesen megválasztható. Ponttöltés elektromos mezője esetén szokás szerint egy végtelen távol lévő pontra mondjuk, hogy nulla potenciálú. Homogén (lokális) gravitációs mező esetén szokás szerint egy, a Föld felszínén lévő pontot választunk nulla potenciálú pontnak. Ezen feladat esetén legyen az origóban nulla a potenciál, vagyis $V(\boldsymbol{0}) = 0$, ekkor

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = t \cdot \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{19}$$

A potenciál függvény tehát így számítható (matematikus potenciál):

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_\Gamma \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}), \mathrm{d}\boldsymbol{l}\rangle = \int_0^1 \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 \begin{pmatrix} yz & xy & xy \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)^T \mathrm{d}t \tag{20}$$

$$= xyz \int_0^1 3 \cdot t^2 \mathrm{d}t = xyz \cdot t^3\Big|_{t=0}^1 = xyz. \quad \text{Valóban } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla V(\boldsymbol{r}). \tag{21}$$

Potenciálszámítás. Matlab: `potential`

10. feladat. Ezen módszerrel számoljuk ki $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ lokális gravitációs mező (12) *fizikus* potenciálját.

11. feladat. Ezen módszerrel számoljuk ki egy Q ponttöltés $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ elektromos mező (14) *fizikus* potenciálját.

4 Vektormezők ábrázolási módjai

Egy $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ típusú függvény (vektormező) ábrázolási módjai:

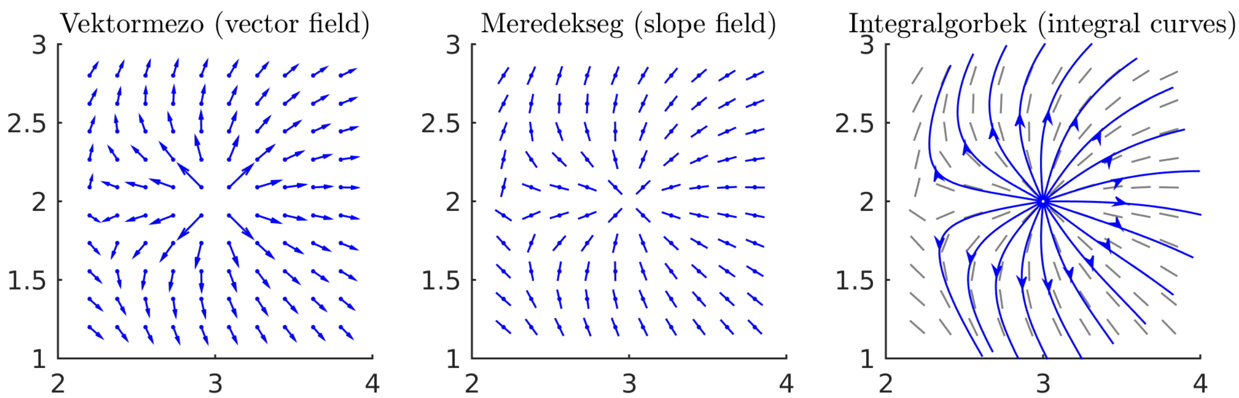
Vektoros ábrázolás (Matlab: `quiver`) A függvény (vektor típusú) értékét diszkrét pontokban vektorként ábrázoljuk. A kiértékelési pont adja meg a vektor kiindulási pontját, a függvény $\|\boldsymbol{F}(x,y)\|_2$ normája pedig a vektor hosszát adja meg.

Meredekségek (slope field) Ez az ábrázolási mód elhanyagolja a vektor értékű függvény pontos irányát csak a vektor tartóegyenesét ábrázolja. A kiértékelési pont a szakasz *középpontját* adja meg. Az ábrán a kellemesebb látvány érdekében a szakaszok hosszát lenormáltam.

Integrálgörbék (integral curves) Azon pályák, melyet pl. egy áramló folyó vizének felszínére helyezett gumilambda írna le. Ez esetben jelölje $\boldsymbol{F}(x,y)$ a folyó felületén mért áramlási sebességet adott (x,y) pontban. Az integrálgörbék tehát a $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t))$ közönséges differenciálegyenlet megoldásai különböző $\boldsymbol{\gamma}(0) = (x_0, y_0)$ kezdeti feltételek mellett, azaz

$$\text{ha } \boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}, \text{ akkor } \begin{cases} \dot{x}_1(t) = F_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}_1(t) = F_2(x(t), y(t)) \end{cases} \tag{22}$$

Ezen ábrázolási mód rendkívül hasznos dinamikus rendszerek (közönséges differenciálegyenlet rendszerek) vizsgálatára.



1. állítás (integrálgörbék invarianciája)**.**egyen $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektormező és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ szigorúan pozitív értékű skalármező. Illetve legyen $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})$. Ekkor ha $\Gamma = \{\boldsymbol{\gamma}(t) \mid t \in [a,b]\}$ integrálgörbéje $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$-nak, akkor $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$-nak is integrálgörbéje (és fordítva). *Költői kérdés: ez miért hasznos nekünk?*

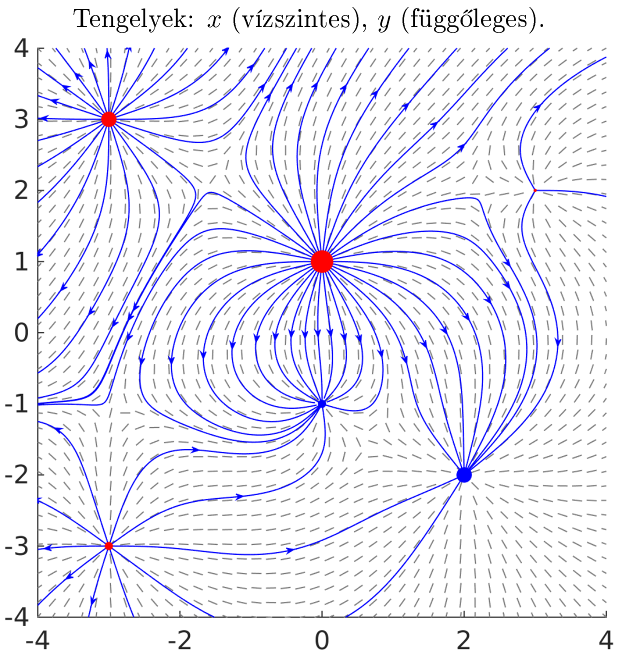


Figure 1: Multipólus elektromos erővonalai és a háttérben az erőtér meredeksége.

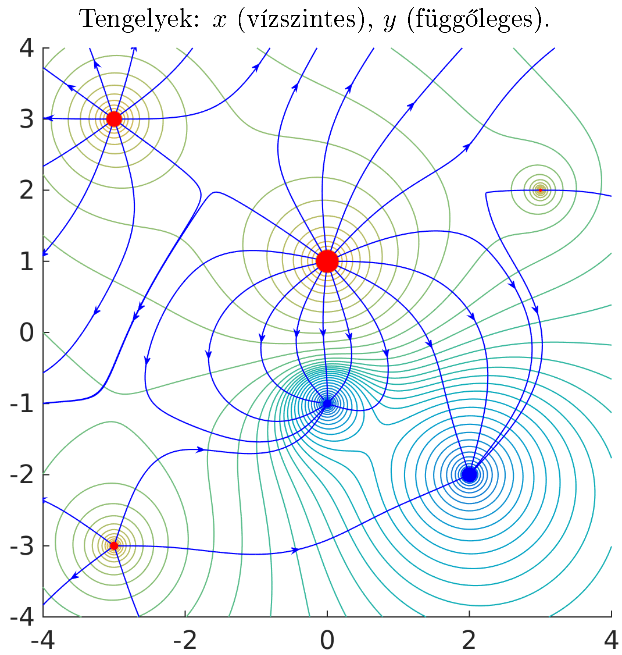


Figure 2: Multipólus elektromos erővonalai és ekvipotenciális görbéi.

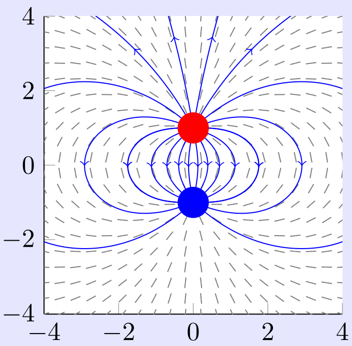
5 Coulomb törvény, elektromos tér

12. feladat. Egy tetszőleges erőtér integrálgörbéi (erővonalai) `ode45, quiver`

Számítsuk ki egy két azonos Q nagyságú de ellentétes előjelő elektromos töltés (elektromos dipólus) elektromos erőterét, ábrázoljuk azt a fentiekben leírt módszerek segítségével. Az elektromos mezőt Coulomb törvénye alapján tudjuk megadni:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1\|^3} - \frac{Q(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2\|^3}\right),\ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \boldsymbol{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (23)$$

ahol $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ a két töltés pozíciója, $\boldsymbol{r}$ pedig az a pont amelyben meg szeretném megadni az elektromos mező irányát és erősségét. Az integrálgörbék számításakor érdemes a pozitív töltés körül felvenni a kezdeti feltételeket, majd megoldani az $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \boldsymbol{E}(\gamma(t))$ differenciálegyenletet.



13. feladat (Az előző feladathoz kapcsolódóan)**.** Számítsuk ki az integrálgörbéit egy elektromos multipólus elektromoz mezejének. A ponttöltések száma (N), (előjeles) erőssége (Q_i) és pozíciója ($\boldsymbol{r}_i$) lehet tetszőleges.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\|^3} \quad (24)$$

Ábrázolás során figyelembe vehetők a következő szempontok (lásd Figure 1)

1. negatív töltéseket kék, pozitívakat piros körrel jelöljük
2. a töltéseket jelölő kör nagysága legyen arányos a töltés nagyságával
3. a pozitív töltésekből induló erővonalak száma legyen arányos a töltés nagyságával

14. feladat. Ekvipotenciális görbék Symbolic Toolbox: `syms, potential, matlabFunction; contour`

Ábrázoljuk egy elektromos mező ekvipotenciális görbéit. Ezen görbék mentén az elektromos skalárpotenciál értéke nem változik. Adjuk meg a (23) és a (24) elektromos mezők $U(\boldsymbol{r})$ skalárpotenciálját, amelyre $\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, majd ábrázoljuk $U(\boldsymbol{r})$ függvény szintvonalait, ezek fogják megadni $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ ekvipotenciális görbéit (lásd Figure 2).

6 Biot-Savart törvény, mágneses tér

A **Biot-Savart törvény** [1, 21. oldal] értelmében, ha egy zárt áramkörben I áram folyik, akkor a tér egy tetszőleges pontjában a mágneses térerősség:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r})}{\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}\|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \big(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{\gamma}(t)\big)}{\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{\gamma}(t)\|^3} \mathrm{d}t \tag{25}$$

ahol

- $\Gamma = \big\{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; t \in [a, b]\big\}$ egy zárt vagy végtelen hosszú görbe, a vezeték amiben az áram folyik
- $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\mathrm{d}t$ elemi vezetékdarab, a vektor iránya a vezetékre érintőleges, irányítása pedig megegyezik az áram folyásának irányával
- $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\gamma}(t)$ az elemi vezetékdarab pontja
- $\boldsymbol{r}_1$ a kérdéses pont
- $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}$ az elemi vezetékdarabtól a kérdéses pont felé mutató vektor
- $\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}\|$ az elemi vezetékdarab és a kérdéses pont közötti távolság
- $\boldsymbol{r}_1$ az integrál kiértékelése során konstansnak tekintendő.

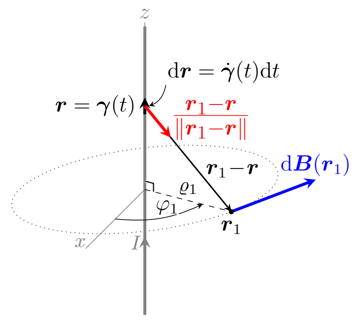


Figure 3:

Végtelen hosszú z irányban haladó egyenes vezetékben folyó áram mágneses mezeje.

$$\Gamma = \left\{\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \big(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{\gamma}(t)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{\gamma}(t)\| = \sqrt{t^2 + x_1^2 + y_1^2} \tag{27}$$

Mivel elég csúnya kifejezéseket kaptunk, érdemes x_1 és y_1-et átírni polárkoordinátákra:

$$\begin{cases} x_1 = \varrho_1 \cos(\varphi_1) \\ y_1 = \varrho_1 \sin(\varphi_1) \end{cases} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \big(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{\gamma}(t)\big) = \begin{pmatrix} -\varrho_1 \sin(\varphi_1) \\ \varrho_1 \cos(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \; \|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{\gamma}(t)\| = \sqrt{t^2 + \varrho_1^2} \tag{28}$$

Ezek után a (25) integrál a következőképpen alakul:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{B}(\varrho_1, \varphi_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho_1 \mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 + \varrho_1^2}^3} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

A belső integrál kiszámítása:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho_1 \mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 + \varrho_1^2}^3} = \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 + \varrho_1^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\varrho_1}$$

Ezért

$$\boldsymbol{B}(\varrho_1, \varphi_1) = \frac{\mu_0 I}{4 \varrho_1 \pi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

15. feladat (Egységkörben folyó áram mágneses mezeje). számoljuk ki analitikusan

A Γ görbe által leírt zárt huzalban I erősségű áram folyik. Számoljuk ki a keltett mágneses mező értékét a z tengely mentén, ha

$$\Gamma = \left\{\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [0, 2\pi)\right\}, \quad \text{vagyis } \boldsymbol{B}(z_1) = ?, \quad B(z_1) = \|\boldsymbol{B}(z_1)\| = ? \tag{31}$$

16. feladat. Tekercsben folyó áram mágneses mezeje Matlabban ábrázoljuk

Adott egy tekercs, melyet Γ görbe ír le. A tekercsben I erősségű áram folyik. Számoljuk ki (analitikusan vagy numerikusan) a keltett mágneses mező értékét először a z tengely, majd a Γ_1 görbe mentén, ha

$$\Gamma = \left\{\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ at \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R},\; a > 0 \text{ paraméter}\right\} \tag{32}$$

$$\Gamma_1 = \left\{\boldsymbol{\gamma}_1(z_1) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z_1 \in \mathbb{R},\; b > 0 \text{ paraméter}\right\} \tag{33}$$

Különböző a és b értékek mellett ábrázoljuk Matlabban a mágneses mező értékét z tengely mentén, vagyis a $B(z_1) := \|\boldsymbol{B}(z_1)\|$ függvényt z_1 szerint.

References

[1] K. Simonyi and L. Zombory. *Elméleti villamosságtan.* Műszaki Könyvkiadó Budapest, 2000.