Matematikai Analízis III.

Gyakorló feladatok

2017. december

Variációszámítás

V1. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényeket:

$$I(u) = \int_0^1 (2u(x) + u'(x)^2)\, dx, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

V2. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényeket:

(a)

$$I(u) = \int_{-1}^1 (u'(x)^2 - u(x)^2)\, dx, \qquad u(-1) = u(1) = 1.$$

(b)

$$I(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u'(x)^2 - u(x)^2)\, dx, \qquad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 1.$$

(*A két fenti feladat költségfüggvénye "szinte" ugyanaz. Mégis, a megoldások egészen mások.*)

V3. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényeket:

$$I(u) = \int_0^\pi (u'(x)^2 - 2u^2(x))\, dx, \qquad u(0) = 1, \quad u(\pi) = -1.$$

V4. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényeket:

$$I(u) = \int_0^1 u'(x)^2 f(x)\, dx, \quad u(0) = 0,\ u(1) = 1,$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x < \dfrac{1}{4} \\ 1 & \dfrac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}.$$

V5. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az $F(x, u, u') = (u')^2 + 2uu' - 16u^2$ alapfüggvény esetén.

V6. Határozzuk meg az alábbi kifejezés stacionárius függvényét

$$I(u) = \int_0^1 (u'(x)^2 - 4u(x))\, dx.$$

V7. *(Zh, 2013.)* Milyen függvény mellett lesz abszolút minimuma az alábbi funkcionálnak:

$$I(u) = \int_0^1 u'^2(x)\ dx,$$

(a) ha a peremfeltételek $u(0) = u(1) = 0$,

(b) ha a peremfeltételek $u(0) = 0$, $u(1) = 1$.

(c) Keressük meg az $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ peremfeltétel mellett $u \geq 0$ függvények közül azt, amelyre a funkcionál értéke minimális, és a keresett függvény grafikonja alatti terület az előre megadott $T = 2$ számmal egyenlő!

V8. *(Zh, 2015.)*

(a) Írjuk fel az Euler-Lagrange egyenletet, és határozzuk meg az alábbi kifejezés stacionárius függvényét:

$$I(u) = \int_0^{\pi/2} \left[u'^2(x) - u^2(x) \right]\ dx, \qquad u(0) = 0, \quad u(\pi/2) = 1.$$

(b) Határozzuk meg a fenti kifejezés stacionárius függvényét azzal a plusz feltétellel, hogy

$$\int_0^{\pi/2} 2u(x)\ dx = 6 - \pi.$$

V9. Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ annak a hengernek a felszíne, melynek alapja az (x, y) síkbeli egységkör. Adott két pont $(1, 0, 0)$, és $(-1, 0, 1)$. Határozza meg az őket összekötő legrövidebb görbét a hengerpaláston.

V10. Az egységgömb felszínén adott két pont $P_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ és $P_2 = (0, 0, 1)$. Határozzuk meg a gömb felszínén a két pontot összekötő legrövidebb görbét.

V11. $D \subset \mathbf{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbf{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:

$$I_1(\phi) = \iint_D |\,\mathrm{grad}\ \phi(\mathrm{x}, \mathrm{y})\,|^2 \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}).$$

V12. $D \subset \mathbf{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbf{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:

$$I_2(\phi) = \iint_D \left(\phi'_x(x, y) + \phi'_y(x, y) \right) \mathrm{d}(x, y).$$

Parciális differenciálegyenletek, transzport egyenlet

T1. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű transzport-egyenleteket

(a)
$$u'_t + u'_x = 0, \qquad (t > 0,\ x\epsilon\mathbb{R}), \qquad u(x,0) = e^x.$$

(b)
$$u'_t + u'_x = x - t, \qquad (t > 0,\ x\epsilon\mathbb{R}), \qquad u(x,0) = e^x.$$

(c)
$$u'_t + 2u'_x = x^2 + 4tx, \qquad (t > 0,\ x\epsilon\mathbb{R}), \qquad u(x,0) = 0.$$

(d)
$$u'_t + 2u'_x = x\cos(t), \qquad (t > 0,\ x\epsilon\mathbb{R}), \qquad u(x,0) = e^x.$$

T2. *(Zh, 2015.)* Oldjuk meg az elsőrendű transzport-egyenletet!

$$\begin{cases} u'_t(t,x) - u'_x(t,x) &= (t+x)^2 \qquad (t > 0,\ x\epsilon\mathbb{R}), \\ u(0,x) &= x\cos x \end{cases}$$

Parciális differenciálegyenletek, Laplace egyenlet

L1. Határozzuk meg a Laplace egyenlet megoldását:

$$u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

az alábbi peremfeltételekkel:

$$u(0,y) = 0$$
$$u(1,y) = 0$$
$$u(x,1) = 0$$
$$u(x,0) = 1$$

L2. Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1)\times(0,1)$ négyzeten az alábbi peremfeltételekkel:

$$u(0,y) = 0$$
$$u(1,y) = 0$$
$$u(x,1) = \sin(2\pi x)$$
$$u(x,0) = 1$$

L3. *(Zh, 2013.)* Legyen $\Omega = \{(x,y) \ : \ x, y > 0\}$, – tehát egy síknegyed. Határozzuk meg a Laplace egyenlet megoldását a következő peremfeltételek mellett:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, \qquad x > 0 \\ u(0,y) &= \sin(y), \qquad y > 0 \\ \lim_{x\to\infty} u(x,y) &= 0, \qquad \forall y \geq 0. \end{aligned}$$

L4. *(Zh, 2014.)* Legyen $\Omega = \{(x,y) \ : \ 0 < x < \pi,\, y > 0\}$. Határozzuk meg a Laplace egyenlet megoldását a következő peremfeltételek mellett:

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0, \qquad \forall y > 0 \\ u(\pi,y) &= 0, \qquad \forall y > 0 \\ u(x,0) &= \sin(2x), \qquad 0 < x < \pi \\ \lim_{y\to\infty} u(x,y) &= 0 \qquad 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

L5. *(Zh, 2015.)* Legyen $\Omega = \{(x,y) \ : \ x > 0,\, 0 < y < \pi\}$. Határozzuk meg a Laplace egyenlet megoldását a következő peremfeltételek mellett:

$$\begin{aligned} u'_y(x,0) &= 0, \qquad \forall x > 0 \\ u'_y(x,\pi) &= 0, \qquad \forall x > 0 \\ u(0,y) &= \cos(2y), \qquad 0 < x < \pi \\ \lim_{x\to\infty} u(x,y) &= 0 \qquad 0 \leq y \leq \pi \end{aligned}$$

L6. Oldjuk meg A Laplace egyenletet:

$$\begin{aligned} \triangle u(x,y) &= 0 \qquad x^2 + y^2 < 4 \\ u(x,y) &= y^2 \qquad x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

(Segítségképp megadom a Laplace egyenletet polárkoordinátákban:

$$w''_{rr} + \frac{1}{r^2} w''_{\theta\theta} + \frac{1}{r} w'_r = 0.)$$

Parciális differenciálegyenletek, hővezetés egyenlete

H1. Tekintsük a hővezetés egyenletét végtelen rúdban:

$$u'_t = u''_{xx}, \qquad x \epsilon \mathbf{R},\ t > 0.$$

Kezdeti hőmérséklet:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Írjuk fel a megoldást. Hogyan lehet interpretálni a kapott eredményt?