Analízis III. 12. heti feladatok

2017. december 7.

PDE 2. rész. Laplace egyenlet (folyt).

1. Oldjuk meg a Laplace egyenletet az egységkör belsejében az alábbi Dirichlet peremfeltétellel:
$$u(x,y) = y^2, \qquad \text{ha } x^2+y^2=1.$$
A Laplace egyenlet polárkoordinátákban:
$$w''_{rr} + \frac{1}{r}w'_r + \frac{1}{r^2}w''_{\theta\theta} = 0, \qquad \text{ahol } w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

2. Oldjuk meg a Laplace egyenletet az $\Omega = \{(x,y) \ : \ x\in\mathbb{R},\, y>0\}$ félsíkon az alábbi Dirichlet peremfeltétellel:
$$u(x,0) = \cos(2x), \quad \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0, \qquad \text{ha } x\in\mathbb{R}.$$

PDE 2. rész. Hővezetés egyenlete.

3. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét végtelen rúdban az alábbi feltételekkel:
$$u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty), \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$$
Hogyan terjed a szakadás az időben?

4. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét **véges rúdban** az adott peremfeltételekkel:
$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx}(x,t), \quad t>0, \ \boxed{x\in(0,1)} \\ u(x,0) &= x^2-x, \quad u(0,t)=u(1,t)=0. \end{aligned} \tag{1}$$
Alkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét.

5. Tekintsük továbbra is a hővezetés egyenletét véges hosszú rúdban: $u'_t = u''_{xx}$, ahol $t>0$, $x\in(0,1)$. Definiáljuk ezen rúd összes hőmennyiségét a t időpontban a következőképpen:
$$E(t) := \int_0^1 u(x,t)\ \mathrm{d}t.$$
Igazoljuk, hogy
   (a) $u(0,t)=u(1,t)=0$ peremfeltétel mellett $E(t)$ időben monoton fogyó,
   (b) $u'_x(0,t)=u'_x(1,t)=0$ peremfeltétel mellett $E(t)$ időben állandó.

6. (*Tartalék*) Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel:
$$u(x,0) = \begin{cases} x, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right), \\ 1-x, & x\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases} \qquad u'_x(0,t)=0, \quad u(1,t)=0.$$

7. (*Tartalék*) Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel:
$$u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t), \quad t>0, x\in(0,1).$$
$$u(x,0) = x^2-x, \quad \boxed{u'_x(0,t)=0,\ u'_x(1,t)=0}$$
Alkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét.