

Analízis III. 11. heti feladatok

2018. december 3.

PDE 1. rész. Transzport egyenlet.

1. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű transzport egyenleteket.

$$(a) \begin{cases} u'_t(x, t) + u'_x(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = e^x \end{cases} \quad [\mathbf{HF}_1] \quad \begin{cases} u'_t(x, t) - u'_x(x, t) = (x+t)^2 \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} u'_t(x, t) + u'_x(x, t) = x - t \\ u(x, 0) = e^x \end{cases}$$

PDE 2. rész. Laplace egyenlet.

2. (a) Legyen $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, $f(0) = f(\pi) = 0$. Igazoljuk, hogy előállítható az alábbi két alakban:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(kx), \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx), \quad x \in [0, \pi].$$

(Javaslat: Fourier sorfejtés speciális alakjai.) A fenti szummákban $\alpha_k = ?$ $\beta_k = ?$

(b) Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, $f(0) = f(1) = 0$. Igazoljuk, hogy előállítható ilyen alakban:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sin(k\pi x), \quad \gamma_k = ? \quad (1)$$

3. Határozzuk meg az $u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0$ Laplace egyenlet megoldását az $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ tartományon az alábbi peremfeltétellel:

$$\begin{aligned} u(0, y) = 0, & \quad u(1, y) = 0, & \quad 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = 0, & \quad u(x, 1) = \sin(\pi x), & \quad 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (2)$$

$[\mathbf{HF}_2]$ Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0, 1) \times (0, 1)$ négyzeten az alábbi peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(1, y) &= 0, & 0 < y < 1, \\ u(x, 0) &= \sin(5\pi x), & u(x, 1) &= 0, & 0 < x < 1. \end{aligned}$$

4. Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0, 1) \times (0, 1)$ négyzeten az alábbi peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned} u'_y(x, 0) &= 0 \quad (\text{derivált van adva!}), & u(x, 1) &= x^2 - x \\ u(0, y) &= 0, & u(1, y) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

D9* Igazoljuk speciális esetekben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\Delta u(x, y) = 0$, ha $(x, y) \in \Omega$.

(a) Tekintsük az alábbi koordináta-transzformációt: $\begin{cases} \bar{x} = x + y \\ \bar{y} = x - y \end{cases}$

(b) Tekintsünk egy φ szögű forgatást a síkon. Az új koordináták:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi) \\ \bar{y} = x \cdot (-\sin(\varphi)) + y \cdot \cos(\varphi). \end{cases}$$

Legyen $\bar{\Omega} = \{(\bar{x}, \bar{y}) : (x, y) \in \Omega\}$, és definiáljuk a $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ új függvényt:

$$v(\bar{x}, \bar{y}) := u(x, y).$$

Igazoljuk, hogy $\Delta v = 0$ az új koordinátákban az $\bar{\Omega}$ tartományban.