Analízis III. 11. heti feladatok

2018. december 3.

PDE 1. rész. Transzport egyenlet.

1. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű transzport egyenleteket.

(a) $\begin{cases} u'_t(x,t)+u'_x(x,t) &= 0 \\ u(x,0) &= e^x \end{cases}$ **[HF$_1$]** $\begin{cases} u'_t(x,t)-u'_x(x,t) &= (x+t)^2 \\ u(x,0) &= \sin(x) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u'_t(x,t)+u'_x(x,t) &= x-t \\ u(x,0) &= e^x \end{cases}$

PDE 2. rész. Laplace egyenlet.

2. (a) Legyen $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, $f(0)=f(\pi)=0$. Igazoljuk, hogy előállítható az alb́bi két alakban:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\cos(kx),\quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sin(kx),\qquad x\in[0,\pi].$$

(*Javaslat:* Fourier sorfejtés speciális alakjai.) A fenti szummákban $\alpha_k=?$ $\beta_k=?$

(b) Legyen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, $f(0)=f(1)=0$. Igazoljuk, hogy előállítható ilyen alakban:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\sin(k\pi x),\quad \gamma_k=? \tag{1}$$

3. Határozzuk meg az $u''_{xx}(x,y)+u''_{yy}(x,y)=0$ Laplace egyenlet megoldását az $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ tartományon az alábbi peremfeltétellel:

$$\begin{aligned} &u(0,y)=0, && u(1,y)=0, && 0<y<1,\\ &u(x,0)=0, && u(x,1)=\sin(\pi x), && 0<x<1. \end{aligned} \tag{2}$$

[HF$_2$] Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1)\times(0,1)$ négyzeten az alábbi peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0, & u(1,y)=0, && 0<y<1,\\ u(x,0) &= \sin(5\pi x), & u(x,1)=0, && 0<x<1. \end{aligned}$$

4. Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1)\times(0,1)$ négyzeten az alábbi peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned} &u'_y(x,0)=0\ \text{ (derivált van adva!)},\ u(x,1)=x^2-x\\ &u(0,y)=0,\ u(1,y)=0 \end{aligned} \tag{3}$$

D9* Igazoljuk speciális esetekben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\triangle u(x,y)=0$, ha $(x,y)\in\Omega$.

(a) Tekintsük az alábbi koordináta-transzformációt: $\begin{cases}\bar{x}=x+y\\ \bar{y}=x-y\end{cases}$

(b) Tekintsünk egy φ szögű forgatást a síkon. Az új koordináták:

$$\begin{cases}\bar{x}=x\cdot\cos(\varphi)+y\cdot\sin(\varphi)\\ \bar{y}=x\cdot(-\sin(\varphi))+y\cdot\cos(\varphi).\end{cases}$$

Legyen $\bar{\Omega}=\{(\bar{x},\bar{y})\ :\ (x,y)\in\Omega\}$, és definiáljuk a $v:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}$ új függvényt:

$$v(\bar{x},\bar{y}):=u(x,y).$$

Igazoljuk, hogy $\triangle v=0$ az új koordinátákban az $\bar{\Omega}$ tartományban.

verzió: 2018.12.03. – 11:00:33 users.itk.ppke.hu/∼polpe/index.php/main/view/anal3

Analízis III. 11. heti feladatok

2018. december 3.

PDE 1. rész. Transzport egyenlet.

1. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű transzport egyenleteket.

(a) $\begin{cases} u'_t(x,t)+u'_x(x,t) &= 0 \\ u(x,0) &= e^x \end{cases}$ **[HF$_1$]** $\begin{cases} u'_t(x,t)-u'_x(x,t) &= (x+t)^2 \\ u(x,0) &= \sin(x) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u'_t(x,t)+u'_x(x,t) &= x-t \\ u(x,0) &= e^x \end{cases}$

PDE 2. rész. Laplace egyenlet.

2. (a) Legyen $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, $f(0)=f(\pi)=0$. Igazoljuk, hogy előállítható az alb́bi két alakban:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\cos(kx),\quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sin(kx),\qquad x\in[0,\pi].$$

(*Javaslat:* Fourier sorfejtés speciális alakjai.) A fenti szummákban $\alpha_k=?$ $\beta_k=?$

(b) Legyen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, $f(0)=f(1)=0$. Igazoljuk, hogy előállítható ilyen alakban:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\sin(k\pi x),\quad \gamma_k=? \tag{1}$$

3. Határozzuk meg az $u''_{xx}(x,y)+u''_{yy}(x,y)=0$ Laplace egyenlet megoldását az $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ tartományon az alábbi peremfeltétellel:

$$\begin{aligned} &u(0,y)=0, && u(1,y)=0, && 0<y<1,\\ &u(x,0)=0, && u(x,1)=\sin(\pi x), && 0<x<1. \end{aligned} \tag{2}$$

[HF$_2$] Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1)\times(0,1)$ négyzeten az alábbi peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0, & u(1,y)=0, && 0<y<1,\\ u(x,0) &= \sin(5\pi x), & u(x,1)=0, && 0<x<1. \end{aligned}$$

4. Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1)\times(0,1)$ négyzeten az alábbi peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned} &u'_y(x,0)=0\ \text{ (derivált van adva!)},\ u(x,1)=x^2-x\\ &u(0,y)=0,\ u(1,y)=0 \end{aligned} \tag{3}$$

D9* Igazoljuk speciális esetekben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\triangle u(x,y)=0$, ha $(x,y)\in\Omega$.

(a) Tekintsük az alábbi koordináta-transzformációt: $\begin{cases}\bar{x}=x+y\\ \bar{y}=x-y\end{cases}$

(b) Tekintsünk egy φ szögű forgatást a síkon. Az új koordináták:

$$\begin{cases}\bar{x}=x\cdot\cos(\varphi)+y\cdot\sin(\varphi)\\ \bar{y}=x\cdot(-\sin(\varphi))+y\cdot\cos(\varphi).\end{cases}$$

Legyen $\bar{\Omega}=\{(\bar{x},\bar{y})\ :\ (x,y)\in\Omega\}$, és definiáljuk a $v:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}$ új függvényt:

$$v(\bar{x},\bar{y}):=u(x,y).$$

Igazoljuk, hogy $\triangle v=0$ az új koordinátákban az $\bar{\Omega}$ tartományban.

Matematikai analízis III.