Analízis III. 10. heti feladatok

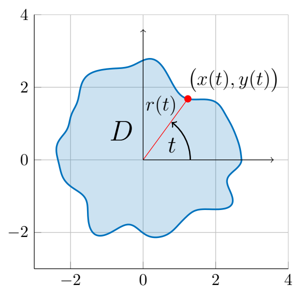
2018. november 26.

Variációszámítás 3. rész.

1. *(Tartalék, a 9. hétről)* Határozzuk meg a $P_0(-1,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat összekötő *minimális hosszúságú* vonalat, amely alatti terület adott T.
   Extra kérdés: Milyen T esetén van megoldása a feladatnak?*

2. Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. (Ezek a gömbfelszín geodetikus görbéi.)

3. Határozzuk meg, hogy adott T területű síkidom kerülete mikor minimális.
   A megoldáshoz ötlet: Helyezzük el a a síkidomot úgy, hogy belsejében tartalmazza az origót. A határoló görbe pontjainak paraméterezése legyen $(x(t), y(t))$, $0 \le t \le 2\pi$, ahol t jelöli a pontot és origót összekötő egyenes és x tengely pozitív részének szögét. A görbe hossza $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t$. A síkidom területe $T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t)+y^2(t))\,\mathrm{d}t$. Igazoljuk. Ezután írjuk fel a korlátozott variációszámítási feladatot. Az “energiafüggvény” az optimális görbe mentén konstans.



4. (Síkinga mozgásegyenlete) Egy elhanyagolható tömegű L hosszú fonál egyik végét egy stabil ponthoz rögzítjük, a másik végére pedig egy m tömegű pontszerű testet helyezünk. Adjuk meg az inga mozgási és helyzeti energiáját, majd a **legkisebb hatás elvét** követve vezessük le az inga mozgásegyneletét.

[HF$_1$] (Térbeli Brachistochrone) Adott a térben két pont P_1, P_2, melyeket egy huzallal összekötünk és egy golyót indítunk P_1-ből P_2-be. Feltesszük, hogy a gravitáció a megszokott módon (-z irányban hat). A leérkezéshez szükséges idő, ha az $\{(x, y(x), z(x)),\ x_1 \le x \le x_2\}$ görbe mentén halad a golyó. Milyen görbe mentén lesz az idő minimális?

$$T(y,z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}{z_1 - z(x)}}\mathrm{d}x.$$

5. *Szenzorok hálózatában navigáció.* Fix érzékelők vannak telepítve, melyek között úgy kell navigálni, hogy minél kevésbé legyünk kitéve az érzékelők figyelmének. Egyszerű speciális esetként egyetlen érzékelőt tekintünk, ami az origóban van. Az $A(a,0)$ pontból kell eljutni a $B(b\cos\beta, b\sin\beta)$ pontba T idő alatt. Az út paraméterezése $(x(t), y(t))$, $0 \le t \le T$. Az út mentén a szenzor ennyit érzékel a navigálóból:

$$E(x(t), y(t)) = \int_0^T I(x(t), y(t))v(t)\mathrm{d}t,$$

ahol $v(t)$ a navigáció sebessége, $I(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a szenzor érzékenysége. Milyen úton érdemes haladni?