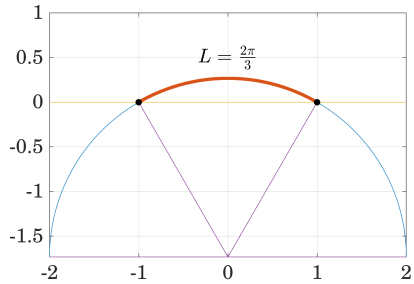
Analízis III. 2018, 9. heti feladatok

Variációszámítás 2. rész.

1. Határozzuk meg a $P_0(-1,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat az $y \geq 0$ félsíkban összekötő *adott L hosszúságú* vonalak közül azt, amelyik integrálja maximális. (Az $y = y(x)$ függvény gráfja alatti terület legnagyobb.) Adjuk meg $y(x)$ függvényt $L = \pi$, majd $L = \frac{2\pi}{3}$ esetén.
Extra kérdés: Milyen L esetén van megoldása a feladatnak?*



[HF$_1$] Határozzuk meg a síkon a $P_0(0,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat összekötő vonalak közül a legrövidebbet azok közül, melyek alatti *terület adott A szám. Extra kérdés*: Milyen T esetén van megoldása a feladatnak?*

2. Adott egymástól $2x_1$ távolságra két oszlop, melyek között egy $L > 2x_1$ hosszú kábel van felfüggesztve. Mi lesz ennek a kábelnek az alakja? Ez azt jelenti, hogy mikor lesz a kábel potenciális energiája minimális? Tekintsük azon $y : [-x_1, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differneciálható függvényt, melyre $y(x_1) = y(-x_1) = y_1$ adott érték, és
$$\int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x = L \tag{1}$$

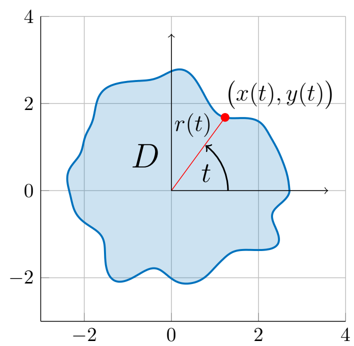
[HF$_2$] Egyenes henger felületén adott két pont. Határozzuk meg az őket osszekötő legrövidebb görbét a henger felszínén. (Legyen a henger alapja az x, y sík origó közepű egységköre. A henger palástja ekkor párhuzamos az z tengellyel. A pontok paraméterezése: (θ, z).) Mi lesz a görbe egyenlete abban a konkrét esetben, amikor a két pont: $P_1(1,0,0)$, $P_2(-1,0,1)$.

3. Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. (Ezek a gömbfelszín geodetikus görbéi.)

4. Egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest felszínén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.

---

5. Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális. Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy a belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen $(x(t), y(t))$, $0 \leq t < 2\pi$, ahol t jelöli a pontot és az origót egyenes szakasz szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva. A görbe hossza:
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{2}$$
   (a) Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:
$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(x^2(t) + y^2(t)\big)\mathrm{d}t. \tag{3}$$
   (b) Írjuk fel a korlátozott variációszámítási feladatot.
   (c) Írjuk fel az “energiafüggvény”-t, ami az optimális görbe mentén konstans.



---

6. (Síkinga mozgásegyenlete) Egy elhanyagolható tömegű l hosszú fonál egyik végét egy stabil ponthoz rögzítjük, a másik végére pedig egy m tömegű pontszerű testet helyezünk. Az így kapott ingát adott kezdeti szögből indítva szabadon engedjük az (x,z) síkban. Adjuk meg az inga mozgási és helyzeti energiáját, majd a legkisebb hatás elvét követve vezessük le az inga mozgásegyneletét.