Analízis III. 2018, 8. heti feladatok

Variációszámítás 1. rész.

1. (Átvezető feladat, felszínszámítás) Adott az $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, és ennek gráfját forgassuk meg az x tengely kőrül. Igazoljuk, hogy az így kapott forgástest felszínének mértéke:
$$2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

2. Adott a síkon két pont $A(a, \alpha)$ és $B(b, \beta)$, ahol $a < b$. Határozzuk meg a pontokat ősszekőtő gőrbék kőzül azt, amelynek ívhossza minimális. Igazoljuk, hogy ez egyenes szakasz.
(Az alapfeladat és a stacionáris megoldásra vonatkozó Euler-egyenlet átismétlése a cél.)

3. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:
$$(a)\quad I(u) = \int_0^1 \Big(2u + \big(u'\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x, \qquad u(0) = 0,\ u(1) = 1$$
$$[\mathrm{HF}]\,(b)\quad I(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\big(u'\big)^2 - u^2\Big)\,\mathrm{d}x, \quad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0$$

4. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet az alábbi funkcionálok esetén és számoljuk ki annak összes megoldását:
$$(a)\quad I(u) = \int_0^1 \big(x + u + 3u'\big)\mathrm{d}x \qquad\qquad (b)\quad I(u) = \int_0^2 \big(u + x\,u'\big)\mathrm{d}x$$

5. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az alábbi alapfüggvények esetén:
$$(a)\quad F(x, u, u') = u^2 + 2(u')^2 - 2u\sin x \qquad\qquad [\mathrm{HF}]\,(b)\quad F(x, u, u') = (u')^2 + 2uu' - 16u^2$$

Állítás. Az alkalmazásokban leggyakoribb esetében, az alapfüggvény $F(x, u, u')$ nem függ közvetlenül x-től, azaz $F = F(u, u')$ alakú. Ekkor definiáljuk a következő energiafüggvényt:
$$E(x) = F\Big(u(x), u'(x)\Big) - u'(x)F'_{u'}\Big(u(x), u'(x)\Big), \qquad \text{avagy rövidebben: } E = F - u'F'_{u'} \tag{1}$$
Ekkor a stacionárius megoldások meghatározása végett elégséges megoldani az Euler-egyenlettel ekvivalens $E = F - u'F'_{u'} = C_1$ differenciálegyenletet, ahol $C_1 \in \mathbb{R}$ konstans.

---

6. (Minimalis felszínű forgástest) Keressük az $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható,
$$f(0) = f(2) = \frac{e^2 + 1}{2e} \tag{2}$$
feltételeket kielégítő függvények közül azt, melyre a görbe által meghatározott forgástest felszíne minimális.

7. Határozzuk meg a Bernoulli feladat megoldását: $T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{\frac{E_0}{mg} - y(x)}}\,\mathrm{d}x.$

8. (Elgondolkodtató) Adjuk meg azt az $u : [a, b] \to \mathrm{R}$ függvényt, melyre $u(a) = u(b) = u_0$ és az $u(x)$ függvény alatti **előjeles** terület minimális, vagyis $\int_a^b u(x)\mathrm{d}x$ minimális. Adjuk meg a megfelelő Euler-egyenletet. Ha az energiafüggvényt alkalmazzuk látszólag ellentmondásba ütközünk, miért? Miért nincs ellentmondás?

D6* Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ függvényt:
$$I(u) = \int_0^1 (u')^2 f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}.$$